

43,00 DH

AI

N. NAJID

N. EL IDRISSI

De l'Université Hassan II - Faculté des Sciences I Casablanca

15362

# PROBLEMES CORRIGES DE PHYSIQUE

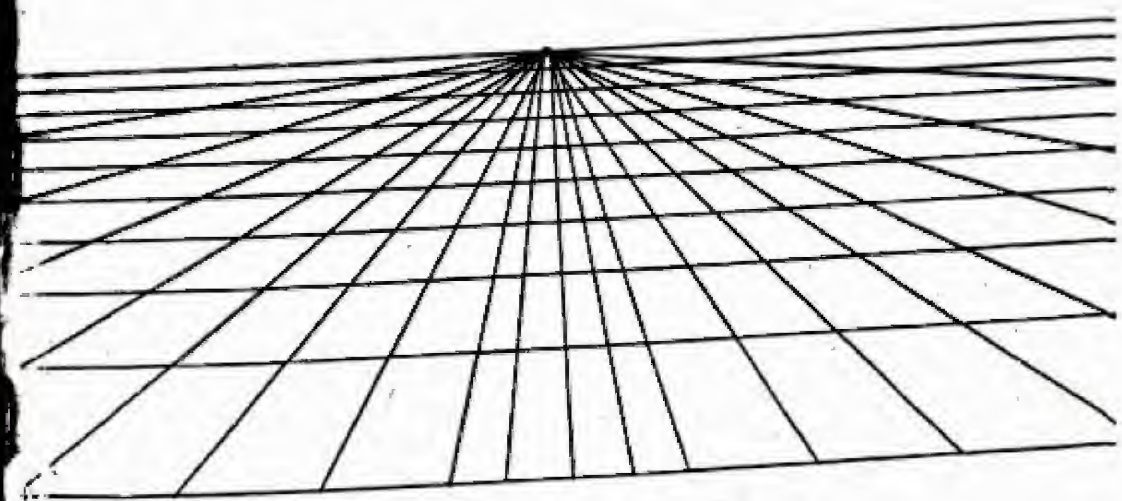
ELECTRICITE-MECANIQUE-THERMODYNAMIQUE

1ère année de l'enseignement supérieur

MP-PC

ETUSUP  
com

Préparation aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs.



Diffusion Sochepress

## AVANT PROPOS

Le présent nouveau recueil contient plus de 80 problèmes d'examens donnés dans les différentes Universités Marocaines. Les sujets traités comprennent l'Electricité, la Mécanique et la Thermodynamique. L'ouvrage s'adresse en particulier aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur de sections MP, PC et ceux des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs.

Le grand choix de problèmes proposés aux examens, nous a amené à choisir ceux qui couvrent intégralement le programme de physique de la première année. Cela étant, nous avons attaché une grande importance au côté pédagogique, en rédigeant les solutions avec clarté et explication nécessaires. Certaines solutions peuvent être traitées de manières différentes, nous les avons signalées chaque fois que possible.

Les examens ont été classés par ordre de session pour chaque matière et chaque énoncé a été précédé d'un titre qui résume son contenu.

Pour obtenir un résultat fructueux, nous conseillons à l'étudiant d'essayer d'abord de résoudre les sujets proposés sans regarder les solutions. Cela lui permettra de mieux imaginer le phénomène étudié et de toucher du doigt les difficultés liées à cette étude. Voici quelques conseils :

- Une bonne connaissance préalable des résultats fondamentaux du cours est indispensable.

- Lire deux fois au moins l'énoncé en entier :

S'il y a plusieurs questions, cela permet de mieux saisir la finalité du sujet. De plus certaines indications, utiles dès la première question, ne sont parfois données qu'à la fin du texte.

- N'effectuer les applications numériques qu'à la fin, de façon à bénéficier de toutes les simplifications intermédiaires et de limiter les risques d'erreurs.

- De simples considérations de bon sens peuvent vous éviter d'écrire des résultats aberrants (exemple : homogénéité d'une relation littérale, de l'ordre de

La loi relative aux droits d'auteur n'autorisant d'une part, que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droits ou ayant cause, est illicite».

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par le Code Pénal.

2<sup>ème</sup> édition 1989  
Dépôt légal n°813/1989

ETUSUP  
.com



grandeur de la valeur numérique obtenue...). Tout cela fait partie du "sens physique".

- Une fois la solution trouvée, la comparer à celle de l'ouvrage; sinon :
- Lire la solution proposée en faisant principalement un effort de compréhension, et non pas de mémoire. Il s'agit de former l'esprit...

Enfin, nous souhaitons que ces quelques directives et la pratique de ce livre permettront à tous d'affronter l'examen dans les meilleures conditions. Vos remarques et suggestions constructives seront les biens reçues, nous vous en remercions à l'avance, elles nous permettront d'améliorer la qualité de cet ouvrage.

Nous tenons à remercier tous ceux qui ont apporté leur collaboration à l'édition de ce livre.

### Avertissement pour la nouvelle édition

Le nouveau recueil, est revu et complété par des problèmes d'Electricité, de Mécanique et de Thermodynamique ; ceci dans un souci de couvrir d'autres Universités Marocaines, ainsi que d'autres sujets plus récents.

Le supplément des examens se trouve à la fin de l'ouvrage. Les nouveaux sujets sont traités de la même manière que les précédents.

Nous avons tenu compte de toutes les suggestions et remarques qui nous ont été formulées par les collègues et étudiants, qu'ils trouvent ici l'expression de nos remerciements pour leur contribution à l'amélioration de cet ouvrage.

Les auteurs

## TABLE DES MATIERES

page

### ELECTRICITE

X(1) (Casablanca I)	Conducteur en équilibre - Théorème de Gauss	
	- Condensateur sphérique.....	9
X(2) (Casablanca II)	Loi fondamentale de l'électrostatique : Champ et Potentiel électrostatiques - Distribution volumique et surfacique des charges.....	16
X(3) (Casablanca II)	Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique	20
X(4) (El Jadida)	Distribution linéique de charges - Champ électrique - Flux	25
X(5) (Fès)	Etude de quelques lignes de champ et surfaces équipotentielles - Distribution surfacique de charges - Distribution non uniforme de charges - Pendules électriques	34
X(6) (Kénitra)	Disque chargé uniformément - Champ créé par des distributions linéiques de charges.....	40
X(7) (Meknès)	Sphère chargée en surface - Théorème de Gauss - Théorème de Thévenin - Transformation de Kennelly.....	49
X(8) (Meknès)	(Distribution volumique de charges) - Conducteurs en équilibre - Influence - Capacité.....	54
X(9) (Rabat)	(Surface équipotentielle) - Propriétés d'un conducteur en équilibre - Théorème d'unicité.....	61
10 (Agadir)	Dipôle électrique placé dans un champ électrique uniforme - Condensateur plan - Lame diélectrique.....	68
11 (Agadir)	Dipôle électrique (Lignes de champ et surfaces équipotentielles) - Electrocinétique : Loi de Kirchhoff - Electromagnétisme : Champ magnétique créé par un ensemble de fils rectilignes - Théorème d'Ampère.....	78
12 (Casablanca I)	Champ créé par un plan indéfini - Condensateur plan (Force électrostatique) - Théorème de Thévenin.....	87
13 (Casablanca I)	Circuit torique - Lois générales de l'induction électromagnétique - Flux magnétique à travers un cadre rectangulaire - Théorème de Maxwell - Lois de Kirchhoff - Principe de superposition - Théorème de Thévenin.....	92
14 (Casablanca I)	Champ électrique d'induction - Force électromotrice d'induction - Pont en équilibre : Détermination des courants.....	98
15 (Fès)	Condensateur sphérique - Théorème de Thévenin - Système de conducteurs en équilibre électrostatique - Coefficients de capacité et d'influence.....	103
16 (Fès)	Conducteurs en équilibre - Influence - Théorème de Thévenin.....	111
17 (Meknès)	Théorème de Thévenin - Cadre métallique en mouvement dans un champ magnétique uniforme - Force électromagnétique - Courants induits.....	118
18 (Rabat)	Champ créé par un solénoïde - Coefficient d'induction mutuelle.....	126
19 (Agadir)	Distribution linéique de charges - Théorème de Gauss - Applications des lois de Kirchhoff - Champ magnétique créé par un circuit polygonal.....	129
20 (Agadir)	Loi de Biot et Savart - Théorème d'Ampère - Force	



21-(Casablanca I)	électromagnétique s'exerçant sur une spire par un fil rectiligne - Théorème de Maxwell.....135
22-(Casablanca I)	Condensateur cylindrique - Résistance d'une couche gazeuse - Force exercée par un électron en mouvement dans un champ magnétique uniforme - Flux coupé.....141
23-(El Jadida)	Charge d'un condensateur - Energie électrostatique - Deux fils conducteurs parcourus en sens inverse par deux courants constants.....145
24-(Rabat)	Distribution volumique de charges non uniforme - Théorème de Thévenin.....151
	Vecteur densité de courant - Induction magnétique - Flux d'induction.....158

## MECANIQUE

1 - (Agadir)	Mouvement avec frottement - Mouvement à force centrale.....163
2 - (Agadir)	Chute libre - Mouvement avec frottement - Mouvement relatif.....172
3- (Casablanca I)	Cinématique classique avec changement de référentiel.....178
4 - (Casablanca I)	Travail - Energie - Théorème de l'énergie cinétique.....184
5- (El Jadida)	Cinématique classique avec changement de référentiel.....188
6- (Fès)	Cinématique classique - Relation fondamentale de la dynamique.....194
7- (Fès)	Cinématique classique avec changement de référentiel.....199
8- (Rabat)	Cinématique du point matériel - Coordonnées cylindriques.....207
9 - (Casablanca I)	Pendule entraîné - Equilibre relatif.....212
10-(Casablanca II)	Energie mécanique - Stabilité - Théorème du moment cinétique.....218
11-(Fès)	Choc élastique - Choc mou.....225
12-(Rabat)	Etude d'une molécule diatomique.....230
13-(Casablanca I)	Energie mécanique - Stabilité - Loi des aires.....235
14-(Casablanca I)	Relation fondamentale de la dynamique - Intégrale première de l'énergie.....241
15-(Casablanca I)	Changement de référentiels - Principe fondamental de la dynamique.....246
16-(Casablanca I)	Cinématique-classique avec changement de référentiel - Force conservative.....252
17-(El Jadida)	Accélération centrale - Loi des aires.....258
18-(El Jadida)	Choc élastique - Référentiel barycentrique.....263
19-(Fès)	Choc élastique - Force centrale - Formules de Binet.....267
20-(Kénitra)	Oscillateur harmonique avec frottement visqueux.....273
21-(Agadir)	Goutte d'eau avec masse variable - Moment d'inertie - Oscillateur harmonique.....278
22-(Kénitra)	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique - Vitesse en coordonnées polaires - Cardioïde.....286

## THERMODYNAMIQUE

1 - (Agadir)	Transformations réversibles d'un gaz parfait et d'un gaz de Van-Der-Waals - Calorimétrie - Formule de Clapeyron.....295
2 - (Agadir)	Premier et second principe - Calorimétrie.....303

3- (Casablanca I)	Détermination de l'équation d'état d'un gaz - Relation de Mayer - Transformation cyclique.....308
4- (Casablanca I)	Coefficients thermoélastiques - Statique des fluides.....314
5- (El Jadida)	Détermination de l'équation d'état d'un gaz - Détente de Joule-Thomson.....319
6- (Casablanca I)	Détermination de l'équation d'état d'un gaz - Représentation d'Amagat.....325
7- (El Jadida)	Transformation isotherme, isobare et adiabatique d'un gaz parfait.....330
8- (Meknès)	Gaz parfait - Gaz obéissant à l'équation $p = \frac{n R T}{V - n B}$ .....333
9- (Rabat)	Cycle de transformation.....339
10- (Casablanca I)	Mélange de gaz parfaits - Relations de Laplace - Cycle de transformation.....345
11- (Casablanca I)	Gaz obéissant à l'équation $PV = RT + BP$ - Gaz de Van-Der-Waals.....349
12- (Casablanca I)	Gaz de Van-Der-Waals - Cycle de Sirling.....354
13- (El Jadida)	Cycle de transformation d'un gaz parfait.....361
14- (Fès)	Cycle de transformation d'un gaz parfait.....367
15- (Kénitra)	Transformations réversible et irréversible - Gaz de Clausius.....370
16- (Rabat)	Gaz parfait - Cycle de Carnot.....379
17- (Rabat)	Gaz parfait - Gaz de Van-Der-Waals - Changement d'état.....389
18- (Agadir)	Pompe à chaleur.....391
19- (Casablanca I)	Premier principe de la thermodynamique - Transformations réversible et irréversible d'un gaz parfait.....394
20- (Casablanca I)	Gaz de Van-Der-Waals - Cycle de Carnot.....400
	Variation d'énergie interne, d'enthalpie et d'entropie d'un gaz obéissant à l'équation d'état : $P = \frac{\sigma T^4}{3}$ .....406
21- (El Jadida)	Pompe à chaleur - Machine frigorifique.....412
22- (Fès)	Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.....414
23- (Fès)	Transformation adiabatique irréversible - Détente de Joule-Thomson - Variation d'enthalpie libre.....417
24- (Fès)	Calorimétrie.....420
25- (Fès)	Première loi de Joule - Transformation adiabatique réversible.....423
26- (Meknès)	Transformations cycliques réversible et irréversible.....428
27- (Meknès)	Rendement d'une machine réversible et d'une machine irréversible.....428

## Supplément à la deuxième édition

Electricité	Etude d'un arc de cercle et de surface chargés.....432
1- (Casablanca I)	Electrocinétique : théorème de superposition et de Thévenin.....437
2- (Marrakech)	Electromagnétisme: Loi de Laplace.....442
3- (Fès)	Etude d'un plan et calotte sphérique chargés uniformément.....445
Mécanique	Etude d'un pendule avec force de frottement.....452
1- (Marrakech)	Etude d'un ressort - Principe fondamental de la dynamique.....452
2- (Casablanca I)	Cylindre homogène avec roulement sans glissement sur un plan incliné.....453
3- (Tétouan)	.....453
Thermodynamique	Diagramme de Clapeyron - Variation d'enthalpie libre.....457
1- (Tétouan)	Echanges de gaz entre deux compartiments - variation d'entropie.....459
2- (Casablanca I)	.....459



## Première partie

# ELECTRICITE

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
CASABLANCA

Année : 1986-87  
1ère session - 1ère partie  
Section : PCI

## ENONCE

Une sphère chargée, de rayon  $R_1$  et de densité superficielle de charge  $\sigma_1$  positive ( $\sigma_1 > 0$ ) est isolée dans l'espace.

1°) Calculer le champ électrique  $\vec{E}(r)$  ainsi que le potentiel  $V(r)$  créés par cette sphère en un point  $M$  dans les deux cas suivants :

$|\vec{OM}| = r \leq R_1$  et  $|\vec{OM}| = r \geq R_1$  ( $O$  : centre de la sphère).

2°) Quelle est l'énergie électrostatique de cette distribution continue de charges ainsi que sa capacité ?

3°) On entoure cette première sphère par une deuxième sphère de rayons  $R_2$  et  $R_3$ , ( $R_1 < R_2 < R_3$ ) initialement neutre. Montrer que les densités superficielles de charges apparues par influence sur la sphère extérieure vérifient la relation suivante :

$$\sigma_1 R_1^2 = -\sigma_2 R_2^2 = \sigma_3 R_3^2$$

Calculer le champ et le potentiel créés par les deux sphères en tout point  $M$  de l'espace :

a)  $r \leq R_1$  ; b)  $R_1 \leq r \leq R_2$  ; c)  $R_2 \leq r \leq R_3$  et d)  $r \geq R_3$ .

avec  $|\vec{OM}| = r$  ;  $O$  : centre commun des deux sphères.

4°) On relie la sphère extérieure au sol ( $V = 0$ ), calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace ainsi que l'énergie électrostatique et la capacité de ce condensateur sphérique. Retrouver la capacité de la première sphère quand elle est isolée de l'espace.

5°) Retrouver l'énergie et la capacité de ce condensateur sphérique en utilisant la densité d'énergie  $\frac{dW}{d\tau} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ .

N.B. : Il est conseillé d'utiliser le théorème de Gauss pour le calcul du champ  $E$  et de prendre l'origine des potentiels ( $V = 0$ ) à l'infini.



## SOLUTION

La répartition des charges électriques étant à symétrie sphérique, le champ électrique possède lui-aussi une symétrie sphérique. En un point M situé à une distance  $r$  de O, le champ  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{OM}$  (champ radial), son module n'est fonction que de  $r$ , le potentiel en M est une fonction  $V(r)$  de la distance  $r$ .

Le flux du champ électrique sortant de la sphère centrée en O et de rayon  $r$  est, quel que soit  $r$  :

$$\Phi(r) = 4 \pi r^2 E(r)$$

D'après le théorème de Gauss, on a :

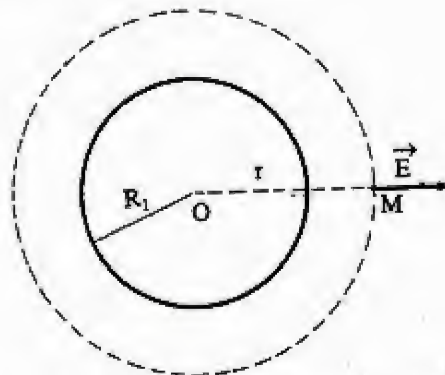
$$\Phi(r) = 0 \quad \text{pour } r < R_1$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{4 \pi R_1^2 \sigma_1}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r > R_1$$

On en déduit :

$$E(r) = 0 \quad \text{pour } r < R_1$$

$$E(r) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2}{r^2} \quad \text{pour } r > R_1$$



*Le champ est nul à l'intérieur et  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  à l'extérieur.*

▼ Dans le cas d'une symétrie sphérique, la relation générale  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$  se réduit à :

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

Les deux expressions de  $V(r)$  sont donc :

$$V(r) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{R_1^2}{r} + C_1 \quad \text{pour } r > R_1$$

$$V(r) = C_2 \quad \text{pour } r < R_1$$

La constante d'intégration  $C_1$  est déterminée par la condition :  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ .

On a donc :

$$C_1 = 0$$

La constante  $C_2$  est imposée par la continuité du potentiel pour la valeur  $r = R_1$  :

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_0} R_1 = C_2$$

On a donc :

$$V(r) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 r} \quad \text{pour } r \geq R_1$$

$$V(r) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r \leq R_1$$

2°) Pour un conducteur unique, l'énergie électrostatique est :

$$W = \frac{1}{2} Q V \quad \text{ou} \quad Q = 4 \pi R_1^2 \sigma_1 \quad \text{et} \quad V = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}$$

Donc

$$W = \frac{2 \pi \sigma_1^2}{\epsilon_0} R_1^3$$

Cette énergie peut prendre aussi la forme :

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

il vient alors :

$$C = \frac{2 W}{V^2}$$

Soit :

$$C = 4 \pi \epsilon_0 R_1$$

3°) ▼ La charge de la sphère  $S_1$  isolée est inchangée :

$$Q_1 = 4 \pi R_1^2 \sigma_1$$



Le conducteur constitué des deux hémisphères porte une charge  $Q_2$  sur sa paroi intérieure et une charge  $Q_3$  sur sa paroi extérieure. La sphère  $S_2$  était initialement neutre, on a donc :

$$Q_2 + Q_3 = 0$$

La paroi intérieure de  $(S_2)$  entoure complètement  $(S_1)$ , il y a donc influence totale, d'où :

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

Nous concluons donc pour les charges :

$$Q_2 = -Q_1 \quad \text{et} \quad Q_3 = Q_1$$

D'où

$$4\pi\sigma_1 R_1^2 = -4\pi\sigma_2 R_2^2 = 4\pi\sigma_3 R_3^2$$

où encore

$$\sigma_1 R_1^2 = -\sigma_2 R_2^2 = \sigma_3 R_3^2$$

▼ Par un raisonnement analogue que 1°), le champ  $\vec{E}$  est radial et le flux de ce champ sortant de la sphère centrée en O et de rayon  $r$  est quel que soit  $r$  :

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r)$$

D'après le théorème de Gauss, on a :

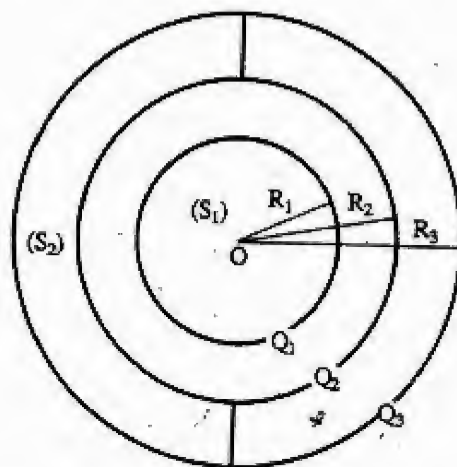
$$\Phi(r) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{pour } r < R_1$$

$$\Phi(r) = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad \text{pour } R_1 < r < R_2$$

$$\Phi(r) = 0 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \quad \text{pour } R_2 < r < R_3$$

$$\Phi(r) = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\epsilon_0} \quad \text{pour } r > R_3$$

Car  $Q_2 = -Q_1$



On en déduit :

$$E(r) = 0 \quad \text{pour } r < R_1$$

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } R_1 < r < R_2$$

$$E(r) = 0 \quad \text{pour } R_2 < r < R_3$$

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r > R_3$$

▼ A partir de la relation liant  $E$  et  $V$  dans le cas d'une symétrie sphérique :

$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ , on déduit les 4 expressions du potentiel :

$$V(r) = C_1 \quad \text{pour } r \leq R_1$$

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2 \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2$$

$$V(r) = C_3 \quad \text{pour } R_2 \leq r \leq R_3$$

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C_4 \quad \text{pour } r \geq R_3$$

La constante d'intégration  $C_4$  est déterminée par la condition :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

Les constantes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont imposées par la continuité du potentiel pour les valeurs  $r = R_1$ ,  $r = R_2$  et  $r = R_3$ .

Il vient alors :

$$C_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3}; \quad C_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right); \quad C_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$



En conclusion on a :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \text{ pour } r \leq R_1$$

$$V(r) = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \text{ pour } R_1 \leq r \leq R_2$$

$$V_2 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 R_3} \text{ pour } R_2 \leq r \leq R_3$$

$$V(r) = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r} \text{ pour } r \geq R_3$$

4°) ▼ La sphère extérieure est reliée au sol, son potentiel devient nul et sa charge extérieure s'annule puisqu'elle s'écoule au sol. Dans ce cas, on a :

$$E = 0 \quad \text{et} \quad V = 0 \quad \text{pour } r \geq R_2$$

$$E = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad V = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{pour } R_1 \leq r \leq R_2$$

$$E = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{pour } r \leq R_1$$

▼ Le potentiel en  $r = R_1$  est donc :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

et l'énergie électrostatique du conducteur est :

$$W = \frac{1}{2} Q_1 V_1 = \frac{Q_1^2}{8 \pi \epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

soit avec

$$Q_1 = 4 \pi R_1^2 \sigma_1$$

$$W = \frac{2 \pi \sigma_1^2}{\epsilon_0} R_1^3 \left( \frac{R_2 - R_1}{R_2} \right)$$

▼ On a constitué un condensateur sphérique de capacité :

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

▼ Si  $R_2 \rightarrow \infty$ , le système formé de  $S_1$  et  $S_2$  devient comme une sphère  $S_1$  isolée dans l'espace. Sa capacité est :

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4 \pi \epsilon_0 R_1$$

5°) ▼ A une distance  $r$  de  $O$ ,  $R_1 \leq r \leq R_2$ , le champ a pour module :

$$E = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

On découpe l'espace compris entre  $R_1$  et  $R_2$  en couches sphériques de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  donc de volume  $d\tau = 4 \pi r^2 dr$  ; à l'intérieur d'une telle couche, le module de  $E$  est le même.

On sait que la densité d'énergie

$$\text{est : } \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

A chaque couche correspond l'énergie :

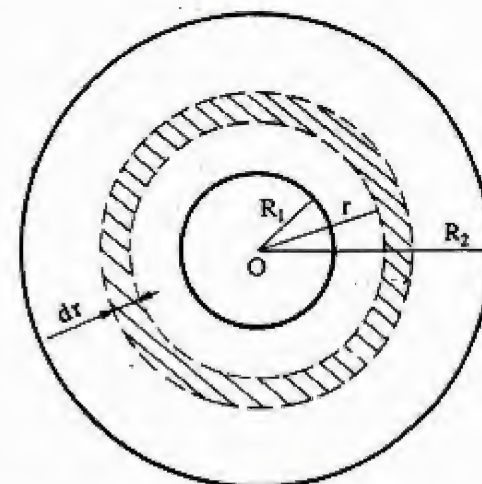
$$dW = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q_1^2}{(4 \pi \epsilon_0 r^2)^2} 4 \pi r^2 dr$$

$$dW = \frac{Q_1^2}{8 \pi \epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

Soit

$$W = \frac{Q_1^2}{8 \pi \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1^2}{8 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Compte tenu de l'expression de  $Q_1$ , on a alors :





$$W = \frac{2 \pi \sigma_1^2}{\epsilon_0} R_1^3 \frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{W}$$

Donc :

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
BEN M'SIK - CASABLANCA

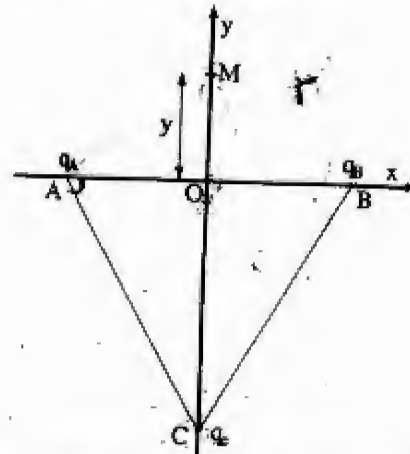
Année : 1984-85  
1ère session - 1ère partie  
Section : PCI

## ENONCE

I - Trois charges électriques positives  $q_A$ ,  $q_B$  et  $q_C$  sont placées sur les sommets d'un triangle équilatéral ABC avec :  $AB = BC = CA = a$ . Soit un point M sur l'axe Oy tel que  $OM = y > 0$  (voir figure 1).

1°) Calculer le potentiel total  $V(M)$ , produit au point M par les trois charges, en fonction de  $y$  et  $a$ .

2°) Si on considère que  $q_A = q_B$ , donner le sens du champ électrique produit au point M par l'ensemble des trois charges. En déduire la valeur du champ à partir de l'expression du potentiel.



II - On considère deux sphères non conductrices ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) de même centre O et de rayon  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). ( $S_1$ ) est chargée uniformément en volume avec une densité volumique  $\rho > 0$ . ( $S_2$ ) est chargée uniformément sur la surface avec une densité superficielle  $\sigma > 0$ . On considère trois points quelconques  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  (voir figure 2) tel que :

$OM_1 = r_1$  avec  $r_1 < R_1$

$OM_2 = r_2$  avec  $R_1 < r_2 < R_2$

$OM_3 = r_3$  avec  $r_3 > R_2$

1°) Calculer la charge :

a)  $Q_1$  contenue dans la sphère ( $S_1$ ) en fonction de  $R_1$  et  $\rho$ .

b)  $Q_2$  répartie sur la surface de la sphère ( $S_2$ ) en fonction de  $R_2$  et  $\sigma$ .

2°) Déterminer le champ électrique total :

a)  $\vec{E}_3$  produit au point  $M_3$

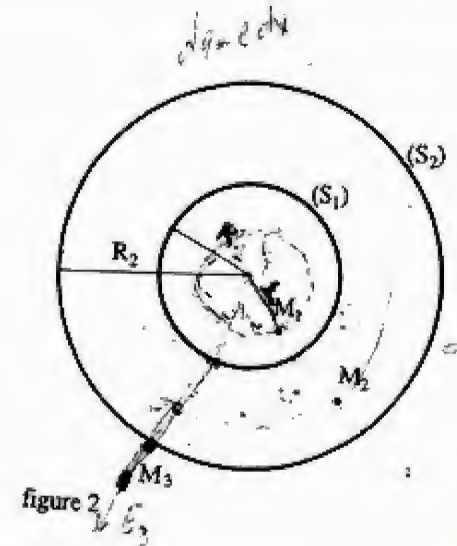
b)  $\vec{E}_2$  produit au point  $M_2$

c)  $\vec{E}_1$  produit au point  $M_1$

3°) Calculer le potentiel électrique total :

a)  $V_3$  produit au point  $M_3$

b)  $V_2$  produit au point  $M_2$



SOLUTION

I - 1°) Le potentiel en M s'obtient par addition :

$$4 \pi \epsilon_0 V(M) = \frac{q_A}{AM} + \frac{q_B}{BM} + \frac{q_C}{CM}$$

Soit :

$$V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_A + q_B}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{q_C}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}} \right)$$

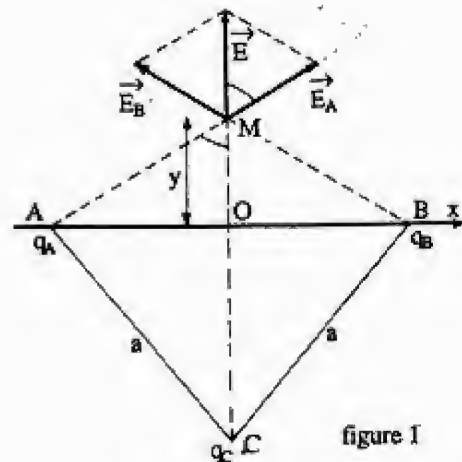


figure 1

2°) Pour  $q_A = q_B$ , le système présente alors une symétrie, ainsi le champ produit en M est porté par l'axe des y.

Le potentiel produit en M est alors :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2q_A}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{q_C}{y + \frac{\sqrt{3}}{2}a} \right)$$

L'axe des y étant une ligne de force, le champ  $\vec{E}$ , porté par cet axe, s'obtient par la relation

$$E = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Soit :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2q_A y}{2\left(y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{q_C}{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2q_A y}{\left(y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{q_C}{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} \right)$$

II - 1°) a)  $Q_1 = \iiint \rho dV$

Soit

$$Q_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$b) Q_2 = \iint \sigma dS$$

Soit

$$Q_2 = \sigma 4\pi R_2^2$$

2°) Par raison de symétrie, le champ est radial.

Le flux sortant à travers une surface de Gauss sphérique de rayon r est, quel que soit r :

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r)$$

D'après le théorème de Gauss, on a

$$a) \quad 4\pi r_3^2 E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}$$

$$b) \quad 4\pi r_2^2 E_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

$$c) \quad 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{\rho 4}{3} \pi r_1^3 \Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1$$

3°) La relation liant le champ  $\vec{E}$  et le potentiel, se réduit à cause de la symétrie du problème à

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr + Cte$$

Les expressions de V(r) sont :

$$a) \quad V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3} + C_3$$

La constante  $C_3$  est nulle car  $V = 0$  pour  $r_3 = \infty$ . Il vient alors :

$$V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3}$$



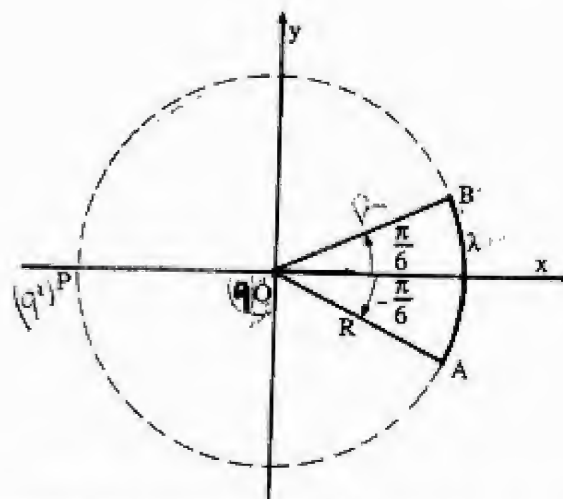
$$b) \quad V_2 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_2} + C_2$$

La constante  $C_2$  est imposée par la continuité du potentiel pour la valeur  $r_3 = r_2 = R_2$

$$\frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 R_2} + C_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2} \Rightarrow C_2 = \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

donc

$$V_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_2} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$$



\*

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
BEN M'SIK - CASABLANCA

Année : 1985-86  
1<sup>ère</sup> session : 1<sup>ère</sup> partie  
Section : PCI

### ENONCE

I - Soit un conducteur neutre placé dans un champ électrostatique. Donner (sans démonstrations) les propriétés électrostatiques de ce conducteur à l'état d'équilibre électrostatique.

II - Soit dans le plan Oxy, un cercle de centre O et de rayon R. A l'origine O se trouve une charge ponctuelle positive fixe q. L'arc du cercle limité par  $\varphi = -\frac{\pi}{6}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  est chargé positivement. Sa densité linéique  $\lambda$  est constante. L'origine de  $\varphi$  est la demi-droite Ox (voir figure). L'arc de cercle exerce une force électrostatique  $\vec{F}$  sur la charge q. On place une charge  $q'$  au point P(-R, 0). Calculer  $q'$  pour que la force résultante exercée sur la charge q soit nulle.

III - L'expression du rotationnel de  $\vec{E} = (E_r, E_\varphi, E_z)$  en coordonnées cylindriques est

$$\text{rot } \vec{E} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

Soit un champ électrique ayant seulement deux composantes : une composante radiale  $E_r$  et une composante axiale  $E_z$  par rapport à l'axe Oz. On sait que  $E_z$  ne dépend que de z ( $E_z = E_z(z)$ ).

1<sup>re</sup>) Montrer : pour que le champ soit un champ électrostatique, il faut que  $E_r$  ne dépende que de r ( $E_r = E_r(r)$ ). r est la distance à l'axe Oz.

2<sup>re</sup>) Soit une surface cylindrique d'axe Oz, de hauteur infinitésimale dz et de rayon r.

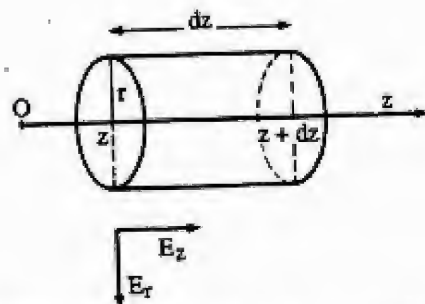
a) Sachant que  $E_z = E_z(z)$  et  $E_r = E_r(r)$  calculer :

- Les flux  $\Phi_z$  et  $\Phi_{z+dz}$  du champ à travers les surfaces de base d'abscisse z et d'abscisse z + dz;

- Le flux  $\Phi_r$  du champ à travers la surface latérale du cylindre.

b) Donner l'expression du flux sortant du cylindre.

c) Si les charges à l'intérieur du cylindre et sur le cylindre sont nulles, montrer que  $E_r$  est proportionnelle à r et à la dérivée de  $E_z$ .



## SOLUTION

I - Voir page 58.

II - Soit  $\vec{F}$  la force électrostatique exercée par l'arc de cercle sur la charge  $q$  et soit  $\vec{F}'$  la force électrostatique qu'exerce  $q'$  sur  $q$ . Calculons le champ créé par l'arc de cercle en O :Par raison de symétrie, le champ  $\vec{E}$  est porté par l'axe  $Ox'$ . Un élément  $dl$  de l'arc de cercle crée en O un champ élémentaire  $d\vec{E}$  dont le module est :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} \quad \text{avec } dl = R d\theta \text{ et } dE_x = dE \cos \theta$$

$$\begin{aligned} E &= \int dE \cos \theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} R d\theta \cos \theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} [\sin \theta]_{-\pi/6}^{\pi/6} \end{aligned}$$

Soit

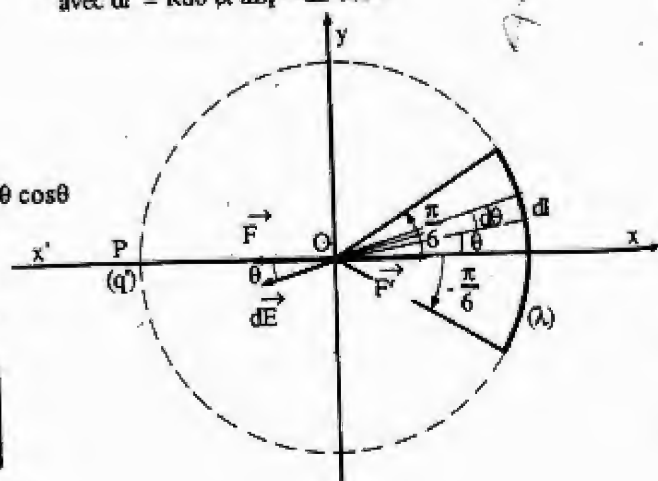
$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

▼ La force électrostatique  $F$  est donc égale à :

$$F = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

▼ La force électrostatique  $F'$  est :

$$F' = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

▼ La force résultante exercée sur la charge  $q$  est donc :

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}'$$

Pour que cette résultante soit nulle, il faut que  $F$  et  $F'$  soient de sens contraire et de même module ce qui impose à la charge  $q'$  d'être positive. $R = 0$  si  $F = F'$  ; soit :

$$\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$q' = \lambda R$$

Soit

III - 1°) Le champ  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel, donc son rotationnel est nul :

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

A partir de l'expression de  $\text{rot } \vec{E}$  en coordonnées cylindriques, on déduit :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad [1]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad [2]$$

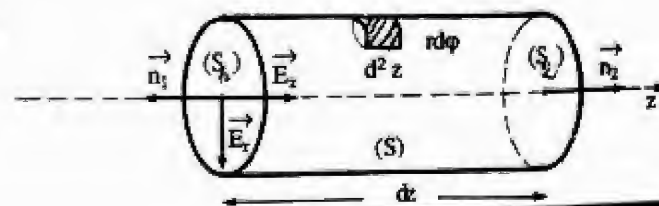
$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = 0 \end{cases} \quad [3]$$

Nous avons  $E_\varphi = 0$  et  $E_z = E_z(z)$ [2] et [3] permettent d'écrire :  $\frac{\partial E_r}{\partial z} = 0$  et  $\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = 0$ donc  $E_r$  ne dépend pas de  $z$  et ne peut dépendre alors que de  $r$  :

$$E_r = E_r(r)$$

2°) a) ▼ Le flux sortant par la base d'abscisse  $z$  est

$$\Phi_z = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1$$





$\vec{n}_1$  et  $\vec{E}_z$  sont de sens contraires et  $\vec{E}_z \perp \vec{n}_1$ . Il vient donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = -E_z(z) dS_1$

Soit

$$\Phi_z = -E_z(z) \pi r^2$$

▼ Le flux sortant par la base d'abscisse  $z + dz$  est :

$$\Phi_{z+dz} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \quad \vec{n}_2 \text{ et } \vec{E}_z \text{ sont parallèles et } \vec{n}_2 \perp \vec{E}_z$$

d'où :

$$\Phi_{z+dz} = E_z(z + dz) \pi r^2$$

▼ Le flux sortant par la surface latérale est :

$$\Phi_r = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int E_r(r) r d\varphi dz$$

$$\Phi_r = r E_r(r) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{dz} dz$$

soit

$$\Phi_r = 2 \pi r dz E_r(r)$$

b) Le flux sortant du cylindre est donc :

$$\Phi = \Phi_z + \Phi_{z+dz} + \Phi_r$$

soit :

$$\Phi = \pi r^2 [E_z(z + dz) - E_z(z)] + 2 \pi r dz E_r(r)$$

c) Les charges à l'intérieur du cylindre et sur le cylindre sont nulles. Le théorème de Gauss permet de dire que le flux sortant total est nul quel que soit  $r$ . Il vient alors :

$$\pi r^2 [E_z(z + dz) - E_z(z)] + 2 \pi r dz E_r(r) = 0$$

$$\pi r^2 \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = -2 \pi r dz E_r(r)$$

donc :

$$E_r(r) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \text{c.q.f.d.}$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
EL JADIDA

Année : 1986-87  
1ère session-1ère partie  
Section : PCI

ENONCE

I - Soit une charge  $q$  placée en un point  $O$  de l'espace.

a) On suppose  $q > 0$ , donner les expressions du champ électrique et du potentiel créés par cette charge en un point  $M$  à la distance  $r$  de  $O$ . ( $OM = r$ ).

b) Sans faire de calcul :

Représenter par un schéma les lignes de champ de cette charge (en pointillé).

Représenter les surfaces équipotentiellles (en trait continu).

c) Si la charge ( $q > 0$ ) est remplacée par  $q'$  ( $q' < 0$ ) :

Représenter de nouveau les lignes de champ.  
Que deviennent les surfaces équipotentiellles ?

II - Soit une charge  $Q$  positive répartie uniformément à l'intérieur de la sphère pleine de rayon  $R$  et de centre  $O$ .

a) Quel est le type de cette distribution ?

b) Calculer la densité de charges correspondante.

c) En appliquant le théorème de Gauss, calculer le champ en tout point de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère).

d) En déduire l'expression du potentiel électrique en tout point de l'espace.

e) Représenter graphiquement  $E = E(r)$  et  $V = V(r)$ .

III - Considérons une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$ , vide à l'intérieur et d'épaisseur négligeable. Sa charge totale est  $Q$ .

a) Quel est le type de cette distribution ?

b) Déterminer sa densité de charges.

c) Donner les graphes  $E = E(r)$  et  $V = V(r)$  pour  $0 < r < \infty$ .

§ IV - Une distribution sphérique de charges est telle que :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & (r \leq a) \\ \rho &= 0 & (r > a) \end{aligned}$$

a) Calculer la charge totale  $Q$  de cette distribution.

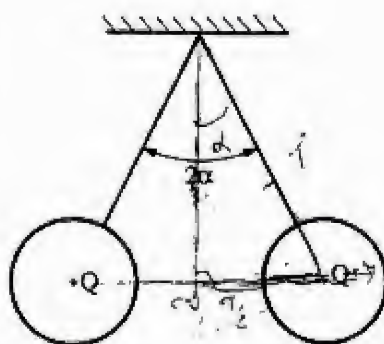
b) Trouver le champ  $E$  et le potentiel  $V$  à l'intérieur de la distribution de charges.

c) Représenter  $E = E(r)$  et  $V = V(r)$ .

V - Un système est constitué de deux pendules isolés. La longueur  $L$  des fils est grande devant le rayon  $r$  des sphères. Une charge  $2Q$  est apportée sur les deux sphères quand elles sont en contact. A l'équilibre mécanique, l'angle des deux pendules est  $2\alpha$ . On demande de déterminer :

a) La relation liant la charge  $Q$  à l'angle  $\alpha$ .

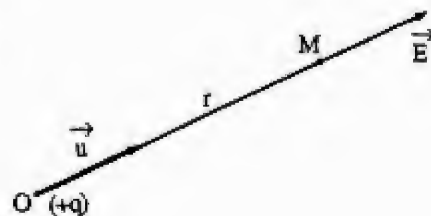
b) Le potentiel des deux pendules à l'équilibre.



SOLUTION

1 - a)  $\vec{E}$  a pour direction la droite passant par  $\vec{OM}$  et  $\vec{E}$  est dirigé dans le sens de O vers M ( $q > 0$ ). Le module du champ est :

$$E = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



Le potentiel créé par une charge ponctuelle  $q$  est :

$$V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

à condition de supposer que  $V = 0$  en un point M infiniment éloigné du point O.

b)  $V = \text{cte}$  si  $r = \text{cte}$  ; les surfaces équipotentielles sont alors des sphères centrées sur la charge ponctuelle et les lignes de champ sont donc les rayons de ces sphères. Ces lignes sont dirigées vers les potentiels décroissants (figure 1)

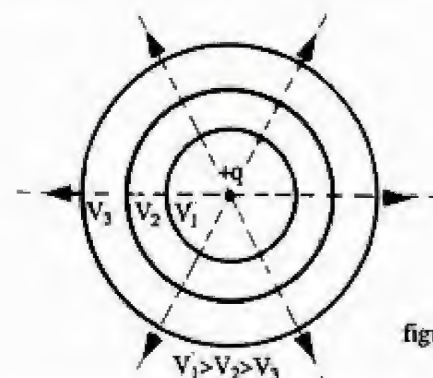


figure 1

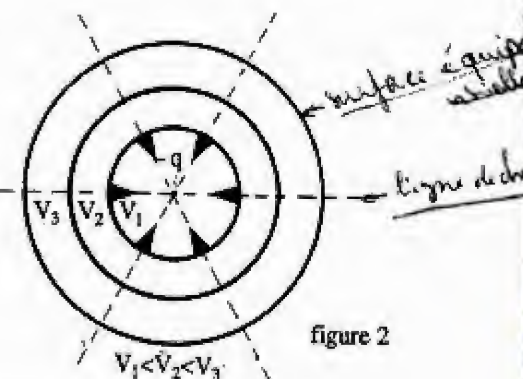


figure 2

c) Les lignes de champ convergent dans ce cas et les surfaces équipotentielles sont là aussi des sphères. (figure 2 ci-dessus).

II - a) La charge  $Q$  étant répartie uniformément à l'intérieur d'une sphère pleine, le type de la distribution de charge est donc volumique uniforme.

b) La charge  $Q$  contenue dans la sphère de centre O et de rayon R est :  $Q = \iiint \rho \, dv$

$\rho$  est uniforme  $\Rightarrow Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

Soit

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

c) Par raison de symétrie, le champ est radial et son module n'est fonction que de  $r$ . Prenons une surface de Gauss sphérique de rayon  $r$  et de même centre O. Le flux sortant à



travers cette surface est, quel que soit  $r$  :

$$\Phi = 4 \pi r^2 E(r)$$

D'après le théorème de Gauss :

Si  $r > R$   $4 \pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3$  (toute la charge est contenue dans la sphère de Gauss)

d'où

$$E = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2}$$

Si  $r < R$   $4 \pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$  (toute la sphère de Gauss est chargée)

d'où

$$E = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} r$$

d) La relation liant le champ  $\vec{E}$  et le potentiel  $V$  se réduit ici à :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr + Cte$$

Les deux expressions de  $V(r)$  sont :

▼  $V = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1$  pour  $r \geq R$

▼  $V = \frac{-\rho}{3 \epsilon_0} \frac{r^2}{2} + C_2$  pour  $r \leq R$

La constante  $C_1$  est nulle car  $V = 0$  pour  $r = \infty$ .

La constante  $C_2$  est imposée par la continuité du potentiel pour la valeur  $r = R$  :

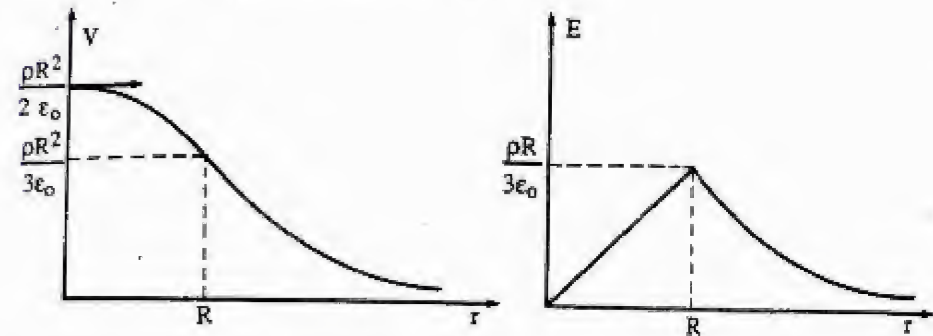
$$\frac{-\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R^2}{2} + C_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} R^2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0}$$

On a donc :

$$V = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{pour } r \geq R$$

$$V = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad \text{pour } r \leq R$$

c) Représentation graphique de  $E(r)$  et  $V(r)$



III - a) Le type de cette distribution est surfacique :

b)  $Q = \iint \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 4 \pi R^2$

soit

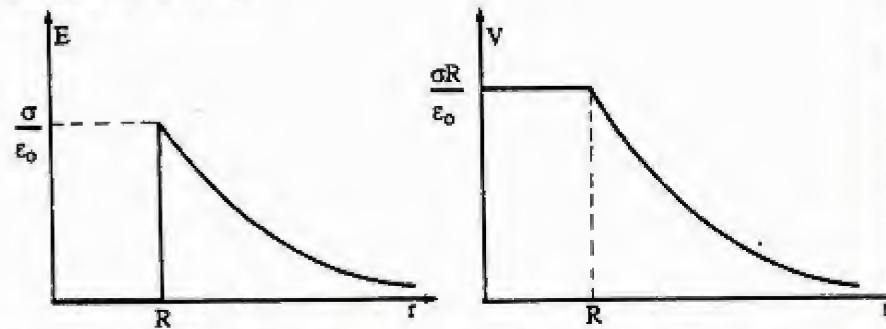
$$\sigma = \frac{Q}{4 \pi R^2}$$

c) Calculons tout d'abord  $E(r)$  et  $V(r)$  : Les résultats sont donnés directement. La démonstration est sur la page 43.

$$E(r) = 0 \quad \text{pour } r < R \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r > R \quad \text{et} \quad V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

Représentons  $E(r)$  et  $V(r)$  :



IV - a) Dans le volume  $dv = 4\pi r^2 dr$ , la charge est  $dq = \rho(r) dv$ . La charge totale  $Q$  de cette distribution est :

$$Q = \int_0^\infty \rho(r) dv$$

Soit :

$$Q = \int_0^\infty \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$Q = 4\pi \rho_0 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right)$$

Il vient :

$$Q = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{15}$$

b) L'application du théorème de Gauss suppose le calcul de la charge totale  $Q$  contenue à l'intérieur d'une surface de Gauss sphérique de rayon  $r_0$ .

pour  $r_0 < a$  :

$$Q = \int_0^{r_0} \rho(r) 4\pi r^2 dr = Q_1$$

pour  $r_0 > a$  :

$$Q = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr = Q_2$$

Calculons  $Q_1$  et  $Q_2$  :

$$Q_1 = 4\pi \rho_0 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr$$

Soit :

$$Q_1 = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r_0^3}{3} - \frac{r_0^5}{5a^2}\right)$$

D'après a) :

$$Q_2 = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{15} = Q$$

L'application du théorème de Gauss nous donne :

pour  $r_0 < a$  :  $4\pi r_0^2 E(r_0) = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$

pour  $r_0 > a$  :  $4\pi r_0^2 E(r_0) = \frac{Q}{\epsilon_0}$

On en déduit :

$$\text{pour } r_0 < a \quad E(r_0) = \frac{\rho_0 r_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r_0^2}{5a^2}\right)$$

$$\text{pour } r_0 > a \quad E(r_0) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r_0^2} \frac{2a^3}{15}$$

Les deux expressions de  $V(r)$  sont donc d'après :

$$V = - \int E dr + Cte$$

pour  $r_0 \geq a$

$$V = \frac{2a^3 \rho_0}{15 \epsilon_0} \frac{1}{r_0} + C_1$$

pour  $r_0 \leq a$

$$V = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(-\frac{r_0^2}{6} + \frac{r_0^4}{20a^2}\right) + C_2$$

La constante  $C_1$  est nulle car  $V = 0$  pour  $r_0 = \infty$ . La constante  $C_2$  est imposée par la continuité du potentiel pour la valeur  $r_0 = a$  :

$$C_2 = \frac{\rho_0 a^2}{4 \epsilon_0}$$

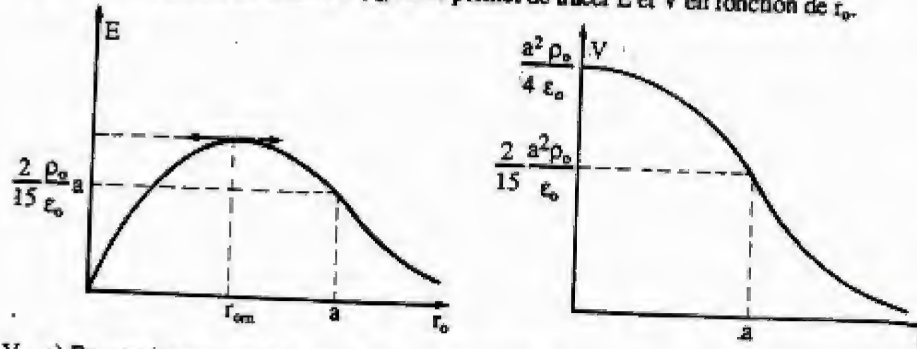
Il vient alors :



$$V = \frac{2 a^3 \rho_0}{15 \epsilon_0 r_0} \quad \text{pour } r_0 \geq a$$

$$V = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{4} - \frac{r_0^2}{6} + \frac{r_0^4}{20 a^2} \right) \quad \text{pour } r_0 \leq a$$

c) L'étude des fonctions  $E(r_0)$  et  $V(r_0)$  nous permet de tracer  $E$  et  $V$  en fonction de  $r_0$ .



V - a) En considérant que la charge de la sphère B est sensiblement à la distance  $AB$  de A, le potentiel en A se met sous la forme :

$$V_A = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{AP_i} \approx \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \frac{Q}{AB} \right)$$

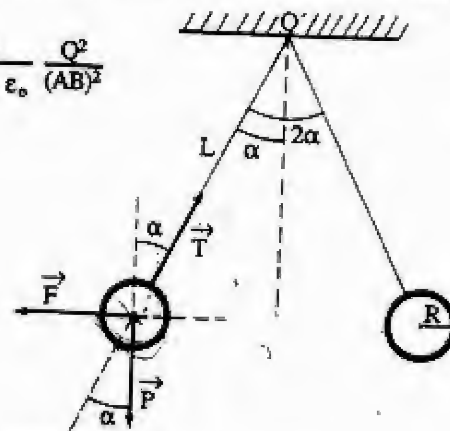
Les deux sphères se repoussent suivant la force horizontale  $\vec{F}$ . En faisant la même approximation :

$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{(AB)^2}$$

L'équilibre du système A implique :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad [1]$$

- où
- $\vec{F}$  : force de Coulomb
  - $\vec{P}$  : poids de la sphère
  - $\vec{T}$  : tension du fil



La projection de la relation [1] sur des axes parallèles à  $\vec{F}$  et  $\vec{P}$  nous donne :

$$F - T \sin \alpha = 0$$

$$mg - T \cos \alpha = 0$$

On en déduit :  $\tan \alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg \tan \alpha$

Or  $F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{(AB)^2}$  avec  $\sin \alpha = \frac{AB}{L}$

Il vient alors :

$$mg \tan \alpha = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{4 L^2 \sin^2 \alpha} \quad [2]$$

b) Le potentiel des deux pendules à l'équilibre est :

$$V = V_A = V_B = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \frac{Q}{AB} \right)$$

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2 L \sin \alpha} \right)$$

Tirons de la relation [2] l'expression de  $Q$  :

$$Q^2 = 16 L^2 \sin^2 \alpha (\pi \epsilon_0 mg \tan \alpha)$$

$$Q = \sqrt{4 \pi \epsilon_0} \cdot 2 L \sin \alpha \sqrt{mg \tan \alpha}$$

On en déduit :

$$V = \sqrt{\frac{mg \tan \alpha}{4 \pi \epsilon_0}} \left( \frac{2 L \sin \alpha}{R} + 1 \right)$$

X

UNIVERSITE SIDI MOHAMED  
BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES  
FES

Année : 1985-86  
1ère session-1ère partie  
Section : PCI

## ENONCE

## PARTIE A

X On considère un disque de rayon  $R$  portant une charge surfacique uniforme  $\sigma$  ( $\sigma < 0$ ).

1°) Calculer le potentiel créé par ce disque en son centre.

2°) Calculer le potentiel en un point  $M$  du bord du disque. Pour cela, on décompose la surface du disque en une infinité d'arcs de couronnes circulaires de centre  $M$  et de rayon  $r$  (figure (a)).

3°) En déduire le sens du champ électrique dans le plan du disque.

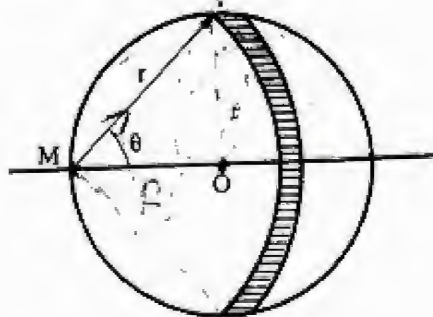


figure (a)

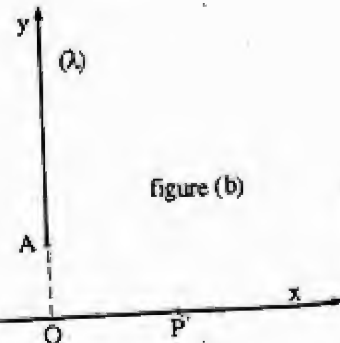


figure (b)

## PARTIE B.

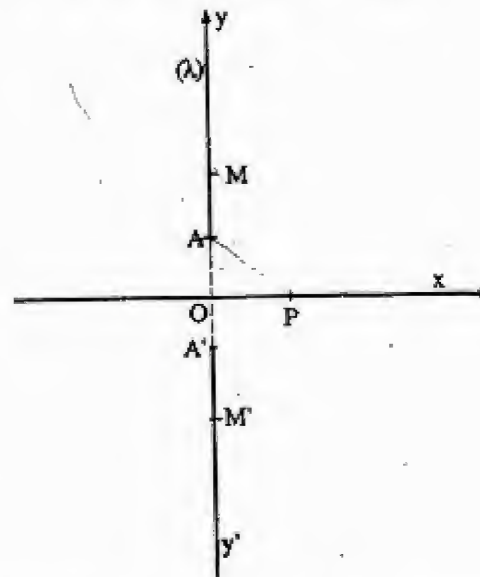
1°) On considère une demi-droite  $Ay$  portant la densité linéaire de charge  $\lambda$  constante positive et un point  $P$  situé à une distance  $OP = a$  de cette demi-droite (la position est celle indiquée sur la figure (b));  $OA = h$ . Calculer les composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ créé en  $P$  par la demi-droite.

2°) On considère une deuxième demi-droite  $A'y'$  symétrique de la première par rapport à  $O$  (figure (c)) mais portant la densité linéaire  $(-\lambda)$ . Déter-

miner le champ créé par deux éléments  $dy$ , situé en des points  $M$  et  $M'$  symétriques par rapport à  $O$  au point  $P$ . En déduire la direction du champ résultant  $\vec{E}$  et calculer ses composantes  $E_x$  et  $E_y$ .

3°) Reprendre les questions du 2ème paragraphe dans le cas où les deux demi-droites portent la même densité de charge  $\lambda$ . Donner l'expression du module du champ  $\vec{E}$ . Que devient l'expression de  $|\vec{E}|$  quand  $h \rightarrow 0$ ?

4°) Montrer qu'à partir des résultats de la 3ème question, on peut déduire l'expression du champ créé par un segment  $AA'$  portant la densité de charge  $\lambda$  (longueur  $2h$ ) en un point de sa médiatrice.



## SOLUTION

## PARTIE A

1°) Potentiel créé par le disque en son centre.

Le potentiel créé par une couronne circulaire élémentaire de rayon  $r$  et d'épaisseur  $dr$  est :

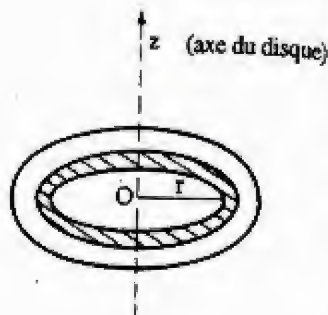
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r}$$



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \frac{2\pi r dr}{r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr$$

D'où 
$$V(O) = \int_{r=0}^{r=R} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dr$$

$$V(O) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$



## 2°) Potentiel au bord du disque.

▼ Le potentiel créé en un point M situé au bord du disque par un élément de surface dS du disque situé à la distance r est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

avec  $dq = \sigma dS = \sigma r d\alpha dr$

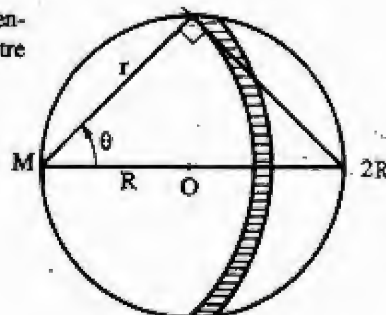
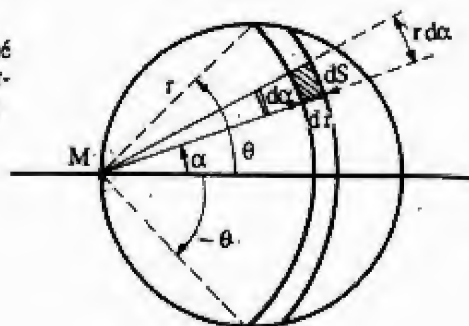
Il vient alors :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\alpha}{r}$$

▼ Pour  $r = \text{cte}$ ,  $\alpha$  varie de  $-\theta$  à  $+\theta$ . Donc le potentiel créé par un arc de couronne circulaire de centre M, de rayon r et d'angle  $\theta$  est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma dr \int_{-\theta}^{+\theta} d\alpha$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\sigma\theta dr$$



▼ Pour intégrer, il faut relier  $\theta$  et  $r$  par une relation :

soit 
$$\cos \theta = \frac{r}{2R}$$

donc : 
$$dr = -2R \sin \theta d\theta = 2R d(\cos \theta)$$

Il vient :

$$dV = \frac{2\sigma\theta}{4\pi\epsilon_0} 2R d(\cos \theta)$$

Pour avoir V, on intègre de  $(r=0, \theta=\pi/2)$  à  $(r=2R, \theta=0)$ . Utiliser à cet effet la relation :

$$\cos \theta = \frac{r}{2R}$$

d'où

$$V(M) = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^0 \theta d(\cos \theta)$$

L'intégration par partie nous donne :

$$V(M) = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \left[ \theta \cos \theta - \sin \theta \right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=0}$$

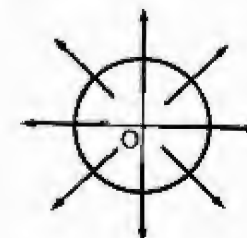
$$V(M) = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}$$

3°) D'après les résultats de 1°) et 2°), nous déduisons que  $V(O) < V(M)$  (car V est négatif, ne pas oublier que  $\sigma < 0$ ). Le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, donc vers le centre du disque.

Remarque : Si  $\sigma > 0$ ,  $V(O) > V(M)$  et le champ sera dirigé vers l'extérieur et issu de O.



$\sigma < 0$



$\sigma > 0$

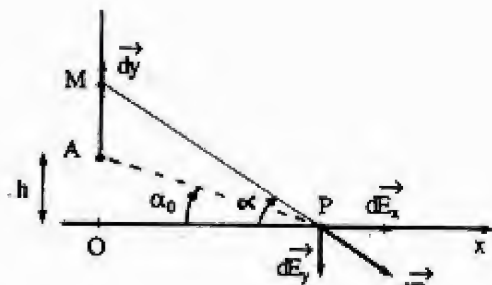
## PARTIE B

1°) On considère en M un élément dy de la demi-droite tel que OM = y portant une charge  $dq = \lambda dy$ . Le champ électrostatique créé par cet élément au point P est :

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \vec{u}$$

Les composantes du champ  $\vec{dE}$  suivant x et y :

$$\begin{cases} dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \cos \alpha \\ dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2} \sin \alpha \end{cases}$$



Exprimons  $dy$  et  $r$  en fonction de  $\alpha$  et  $a$  :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

Soit :  $dy = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$  et donc  $\frac{\lambda dy}{r^2} = \frac{\lambda}{a} d\alpha$

Il vient alors :

$$\begin{cases} dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \cos \alpha d\alpha \\ dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \sin \alpha d\alpha \end{cases}$$

Le champ total  $\vec{E}$  créé par la demi-droite est la somme des champs élémentaires  $d\vec{E}$  créé par chaque élément  $dy$ .

Donc :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha$$

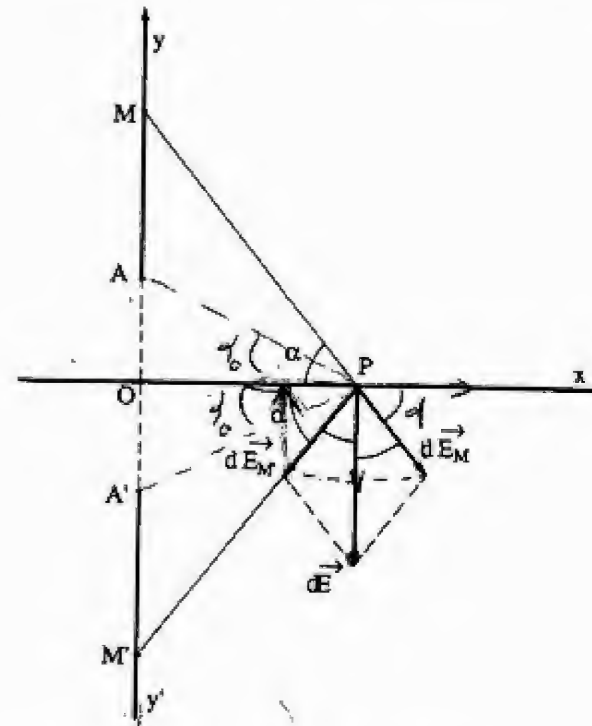
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha$$

Soit  $E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (1 - \sin \alpha_0)$  et  $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \alpha_0$

avec  $\sin \alpha_0 = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$  et  $\cos \alpha_0 = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}$

2°) Par un raisonnement analogue, le champ élémentaire créé par un élément de la

demi-droite  $A'y'$  portant la charge  $dq = -\lambda dy$  est porté par  $\vec{u}$  (voir schéma). La résultante des champs élémentaires créés par deux éléments  $dy$ , situé en des points  $M$  et  $M'$ , est donc porté par l'axe des  $y$  dans le sens négatif. On en déduit que la composante du champ total  $\vec{E}$  suivant l'axe des  $x$  est nulle et celle suivant l'axe des  $y$  est deux fois la valeur calculée en 1°). Soit :



$$E_x = 0 \quad \text{et} \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \cos \alpha_0$$

ou encore

$$E_x = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

3°) ▼ Maintenant, les deux demi-droites portent la même densité de charge  $\lambda$  positive, le champ résultant sera alors porté par l'axe des  $x$  par un raisonnement analogue au 1°) et 2°); son module est alors :

$$E_x = 2E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} (1 - \sin \alpha_0)$$



ou encore

$$\xi_x = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 a} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right)$$

▼ Quand  $h \rightarrow 0$ , le module de  $\xi_x$  est donc :

$$\xi_x = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 a}$$

C'est le champ créé par un fil indéfini portant une densité de charge uniforme  $\lambda$  en un point P situé à la distance  $a$  de l'axe du fil.

4°) En appliquant le principe de la superposition, on peut déduire le champ créé par un segment AA' de longueur  $2h$  et portant la charge  $\lambda$  en un point de sa médiatrice.

$$\vec{E}_{\text{fil indéfini}} = \vec{E}_{2 \text{ fils semi-infinis}} + \vec{E}_{AA'}$$

Soit d'après 3°) :

$$E_{AA'} = E_{\text{fil indéfini}} - E_{2 \text{ fils semi-infinis}}$$

Soit :

$$E_{AA'} = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 a} \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

UNIVERSITE MOHAMED V  
FACULTE DES SCIENCES  
KENITRA

Année : 1986-87  
1ère session-1ère partie  
Section : PCI

ENONCE

### A - QUESTION DE COURS

- Citer les méthodes de calcul d'un champ magnétostatique  $\vec{B}$ .
- En considérant le régime stationnaire pour lequel il n'y a pas accumulation des charges, donner les relations caractéristiques de  $\vec{B}$ .
- Comparaison entre  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  ( $\vec{E}$  est le champ électrostatique).

### B - EXERCICE I

Soit une sphère (S) de centre O et de rayon R, portant une densité superficielle uniforme de charge  $\sigma$ .

- Quelle est la charge totale Q, portée par la sphère ?
- Quelle est la symétrie du système ainsi que la nature du champ  $\vec{E}$  ?
- Calculer le champ  $\vec{E}$ , en un point situé à l'intérieur de la sphère :
  - sans utiliser le théorème de Gauss;
  - en utilisant le théorème de Gauss.
- Calculer le champ  $\vec{E}$ , à l'extérieur de la sphère.
- En déduire la valeur du potentiel en tout point de l'espace.
- Tracer les courbes représentatives  $E(r)$  et  $V(r)$ , conclure.

### EXERCICE II

Aux bornes d'un générateur de f.e.m. E, est placé un circuit formé de deux résistances R et  $R_1$  en série. On appelle U la différence de potentiel entre les extrémités A et B de la résistance R.

- Exprimer U en fonction de E, R,  $R_1$ .
- En supposant que R et  $R_1$  étant constants, E subisse une variation  $\Delta E$ , quelle est la variation correspondante  $\Delta U$  de U ?
- $E = 500$  Volts,  $\frac{\Delta U}{\Delta E} = 0,2$ , calculer U, R,  $R_1$  sachant que la puissance électrique fournie au circuit par le générateur E est 50 Watts.
- En supposant que, E et  $R_1$  étant constants, R subisse une petite variation  $\Delta R$ , quelle est la variation correspondante de U ?

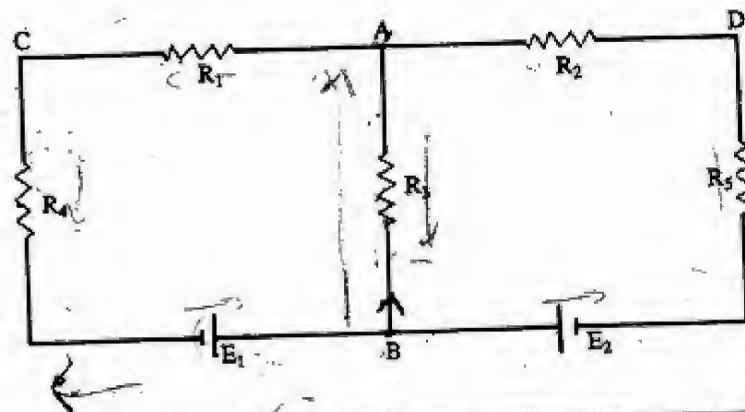
### EXERCICE III

On considère le circuit électrique suivant (figure)

- Calculer l'intensité du courant dans la branche AB par le théorème de Thévenin.
- On supprime les deux générateurs :
  - Donner le nouveau schéma du réseau obtenu.

b) En appliquant la transformation de Kennely, calculer la résistance équivalente vue de C et D.

On donne :  $R_1 = 0,5 \Omega$   $R_2 = 1 \Omega$   $R_3 = 4 \Omega$   
 $R_4 = 0,5 \Omega$   $R_5 = 1 \Omega$   $E_1 = 16 V$   $E_2 = 10 V$



SOLUTION

### B - Exercice I :

1°) Dans l'élément  $dS$  de la sphère (S), la charge est :

$$dQ = \sigma dS$$

Soit

$$Q = \sigma 4 \pi R^2$$

2°) Pour cette répartition de charges à symétrie sphériques, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}$$

$\vec{u}$  étant le vecteur unitaire de  $\vec{OM}$ .

3°) a) Le potentiel est constant à l'intérieur car la fonction potentiel n'admet pas d'extrémums en dehors des charges. Calculons donc le potentiel au point O centre de la sphère.

Un élément de surface  $dS$  portant une charge  $dq$  crée en O un potentiel  $dV = \frac{dq}{4 \pi \epsilon_0 R}$

Le potentiel total  $V(O)$  est la somme des potentiels dus à tous les éléments :

$$V(O) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 R} \int dq = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

Comme  $E = -\frac{dV}{dr}$ , donc à l'intérieur de la sphère, le champ  $E$  est nul. (Rappelez-vous des propriétés électrostatiques d'un conducteur)

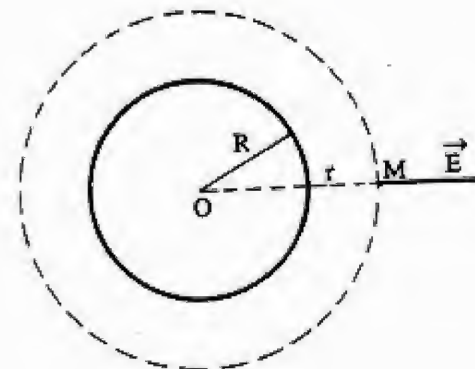
b) Dans ce cas, M est à l'intérieur de la sphère chargée :  $r < R$ . La surface de Gauss ne contenant aucune charge, le flux sortant est nul. Ainsi, le champ est nul :  $E = 0$ .

4°) Si M est à l'extérieur de la sphère chargée :  $r > R$ , la surface de Gauss contient la charge  $Q$ , donc :

$$\phi = 4 \pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Soit :



5°) La relation entre champ électrostatique et potentiel électrique se réduit à :

$$E = -\frac{dV}{dr}; \quad \text{soit } V = -\int E dr + Cte$$

$$r < R : \quad E = 0 \quad \text{donc} \quad V = cte$$

$$r > R : \quad V = -\frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} + cte$$

Soit

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} + cte$$

Cette dernière constante se détermine par la condition  $V = 0$  pour  $r = \infty$ , ce qui annule cette constante. La première constante est imposée par la condition de continuité du potentiel en



$r = R$ , ce qui nous donne :

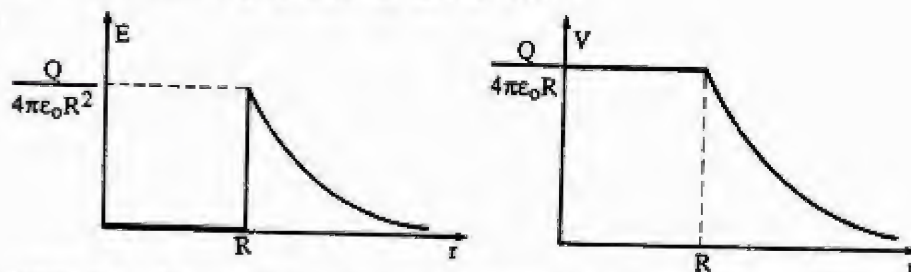
$$cte = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

En résumé :

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R} \quad \text{pour } r \leq R$$

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r} \quad \text{pour } r \geq R$$

6°) Représentation graphique de  $E(r)$  et  $V(r)$  :

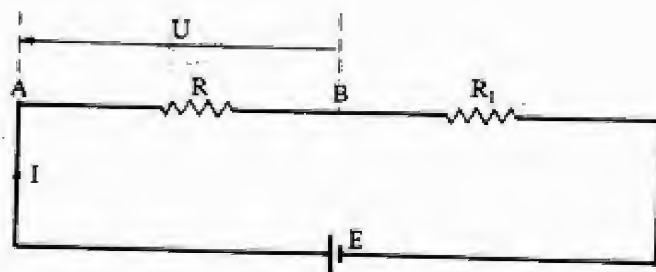


Conclusion : On constate que pour  $r > R$ , le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute la charge  $Q$  était concentrée au centre  $O$  de la sphère et qu'en traversant la couche de l'intérieur vers l'extérieur, le champ subit une discontinuité passant de  $E = 0$  à

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Exercice II .

1°) Soit le circuit suivant :



La loi d'Ohm fournit les équations suivantes :

$$U = RI \quad \text{et} \quad E = (R + R_1) I$$

Il vient alors

$$U = \frac{R}{R + R_1} E \quad [1]$$

2°)  $R$  et  $R_1$  étant constants, donc  $U = k E$ . On a alors :

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta E}{E}$$

Soit

$$\Delta U = \frac{U}{E} \Delta E = \frac{R}{R + R_1} \Delta E$$

3°) Sachant que la puissance électrique fournit au circuit par le générateur  $E$  est  $P = EI = 50$  Watts et  $E = 500$  Volts. On en déduit la valeur de l'intensité de courant  $I$  :

$$I = \frac{P}{E} = 0,1 \text{ A}$$

▼ Cette puissance est perdue par effet Joule :  $P = (R + R_1) I^2$

Il vient alors :  $R + R_1 = \frac{P}{I^2} = 5\,000 \, \Omega$

$$\nabla \frac{\Delta U}{\Delta E} = \frac{U}{E} = 0,2 \quad \Rightarrow \quad U = 0,2 E = 100 \text{ Volts}$$

▼ La relation [1], nous donne :

$$\frac{U}{E} = \frac{R}{R + R_1} \quad \Rightarrow \quad R = (R + R_1) \frac{U}{E}$$

$$\text{Soit} \quad R = 5\,000 \cdot 0,2 = 1\,000 \, \Omega$$

$$\text{donc} \quad R_1 = 5\,000 - 1\,000 = 4\,000 \, \Omega$$

▼ En résumé :

$$U = 100 \text{ V} , \quad R = 1\,000 \, \Omega , \quad R_1 = 4\,000 \, \Omega$$

$$4^{\circ}) U = \frac{R}{R + R_1} E$$

$$\text{Log } U = \text{Log } R - \text{Log } (R + R_1) + \text{Log } E$$

En différentiant :

$$\frac{dU}{U} = \frac{dR}{R} - \frac{dR}{R + R_1}$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{R_1}{R(R + R_1)} dR$$

donc

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{R_1}{R(R + R_1)} \Delta R$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta R} = U \frac{R_1}{R(R + R_1)}$$

Soit

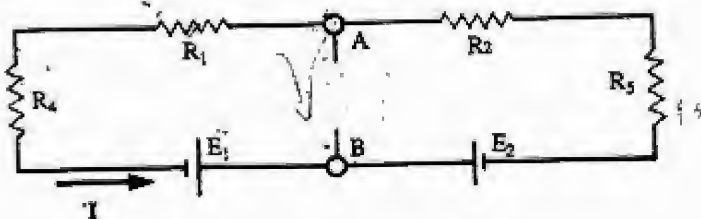
$$\frac{\Delta U}{\Delta R} = E \frac{R_1}{(R + R_1)^2}$$

A.N. :

$$\frac{\Delta U}{\Delta R} = 0,08$$

### Exercice III .

1°) La f.e.m. du générateur équivalent est la d.d.p.  $U_{AB}$  quand la résistance  $R_3$  n'est pas en circuit (figure ci-dessous).



D'après la loi d'Ohm, on a :

$$E_1 - E_2 = (R_5 + R_2 + R_1 + R_4) I$$

Soit

$$I = 2 \text{ A}$$

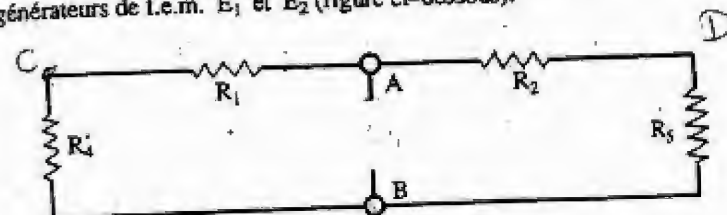
La tension  $U_{AB}$  est donc :

$$U_{AB} = -E_1 + (R_4 + R_1) I$$

Soit

$$U_{AB} = -14 \text{ V}$$

▼ La résistance interne du générateur de Thévenin est celle entre A et B lorsque l'on supprime les générateurs de f.e.m.  $E_1$  et  $E_2$  (figure ci-dessous).



$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_2 + R_5}$$

d'où

$$R_{AB} = \frac{(R_2 + R_5)(R_1 + R_4)}{R_1 + R_4 + R_2 + R_5}$$

A.N. :

$$R_{AB} = \frac{2}{3} \Omega$$

▼ L'intensité du courant circulant dans la résistance  $R_3$  est alors :

$$i = \frac{U_{AB}}{R_{AB} + R_3}$$

Soit

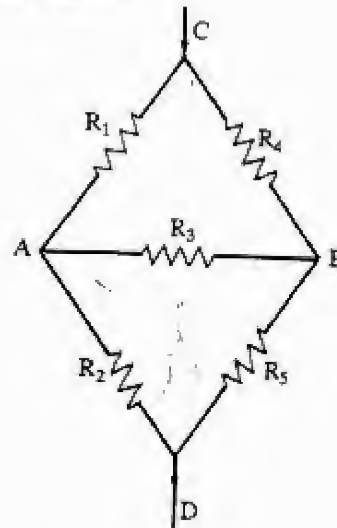
$$i = \frac{-14}{\frac{2}{3} + 4} = -3 \text{ A}$$

Ce courant circule donc dans le sens de B à A

$$i_{BA} = 3 \text{ A}$$



2°) a) Nouveau schéma du réseau :  
Vue à partir de C et D en supprimant les deux générateurs



b) Remplaçons le triangle ABC par une étoile formée de trois résistances  $r_1$ ,  $r_3$  et  $r_4$  telles que :

$$r_1 = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{2}{5}; r_3 = \frac{R_4 R_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{1}{20}; r_4 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{2}{5}$$

Le schéma équivalent est alors :

Ce schéma montre que  $r_1$ ,  $R_5$  et  $r_4$ ,  $R_2$  sont en série d'une part et leurs résistances équivalentes sont parallèles.

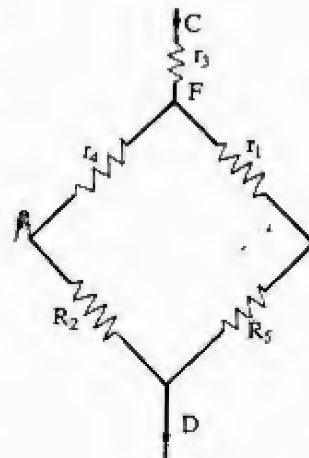
La résistance équivalente entre C et D est la somme des résistances  $r_3$  et  $R_{FD}$ .

Soit alors :  $r_1 + R_5 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5} \Omega$

$r_4 + R_2 = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5} \Omega$

donc  $\frac{1}{R_{FD}} = \frac{1}{r_1 + R_5} + \frac{1}{r_4 + R_2} = \frac{5}{7} + \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$

Soit  $R_{FD} = \frac{7}{10} \Omega$



D'où  $R_{CD} = r_3 + R_{FD} = \frac{1}{20} + \frac{7}{10}$  soit

$R_{CD} = 0,75 \Omega$

UNIVERSITE SIDI MOHAMED  
BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES  
MEKNES

Année : 1985-86  
1ère session-1ère partie  
Section : PCI

ENONCE

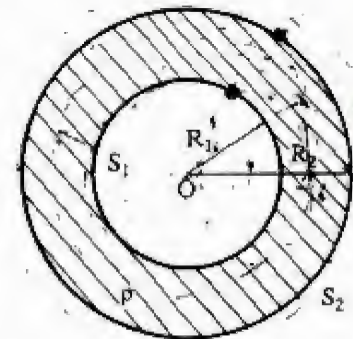
I - On considère une distribution volumique de charges de densité  $\rho$  constante, comprise entre deux sphères  $S_1$  et  $S_2$  concentriques, creuses de centre O et de rayon  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

1°) Calculer le champ électrique créé par cette distribution en tout point M de l'espace défini par sa distance

$r = \|OM\|$  (On distinguera trois cas).

2°) En déduire le potentiel au point M. (On prendra le potentiel nul à l'infini).

3°) En déduire le champ et le potentiel créés par une sphère chargée uniformément en volume avec une densité  $\rho$ .



II - On élimine la distribution volumique de charges, les sphères  $S_1$  et  $S_2$  étant conductrices, en équilibre et portant respectivement les charges  $Q_1$  et  $Q_2$ .

1°) Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace. (Le potentiel est nul à l'infini).

2°) On relie les deux sphères avec un fil conducteur. Donner la nouvelle répartition de charges sur chaque sphère.

3°) La sphère  $S_1$  portant la charge  $Q_1$ , la sphère  $S_2$  est reliée au sol.

a) Calculer la capacité C de ce condensateur.

b) Montrer que lorsque  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ , le condensateur sphérique est

équivalent à un condensateur plan.

## SOLUTION

1- 1°) La répartition des charges électriques étant à symétrie sphérique, le champ électrique possède lui aussi une symétrie sphérique. En un point M situé à une distance  $r$  de O, le

champ  $\vec{E}$  est porté par  $\vec{OM}$  (champ radial), son module n'est fonction que de  $r$  et le potentiel en M est une fonction de la distance  $r$ .

Le flux du champ électrique sortant de la sphère centrée en O et de rayon  $r$  est quel que soit

$$\Phi(r) = 4 \pi r^2 E(r)$$

Appliquons le théorème de Gauss à la surface formée par la sphère de rayon  $OM = r$  dans les cas :

$$\nabla r < R_1 \quad 4 \pi r^2 E = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

$$\nabla R_1 < r < R_2 \quad 4 \pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4 \pi}{3} (r^3 - R_1^3)$$

donc

$$E = \frac{\rho}{3 \epsilon_0 r^2} (r^3 - R_1^3)$$

$$\nabla r > R_2 \quad 4 \pi r^2 E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4 \pi}{3} (R_2^3 - R_1^3)$$

donc

$$E = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}$$

2°) En raison de la symétrie sphérique, la relation générale  $\vec{E} = - \vec{\text{grad}} V$  se réduit ici à :

$$E(r) = - \frac{dV(r)}{dr}$$

Les expressions de  $V(r)$  sont donc :

$$\nabla V(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r} + C_1 \quad \text{pour } r > R_2$$

$C_1$  est déterminée par la condition :  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ . On a donc  $C_1 = 0$ .

Il vient :

$$V(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r}$$

$$\nabla V(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + C_2 \quad \text{pour } R_1 < r < R_2$$

$C_2$  est imposée par la continuité du potentiel pour la valeur  $r = R_2$ . On a :

$$\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2} = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left( - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2} \right) + C_2$$

Soit

$$C_2 = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left( \frac{3}{2} R_2^2 \right)$$

Il vient alors :

$$V(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left( \frac{3}{2} R_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r} \right)$$

$$\nabla V(r) = C_3$$

pour  $r < R_1$

$C_3$  est imposée par la continuité du potentiel pour la valeur  $r = R_1$ . Soit :

$$\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left( \frac{3}{2} R_2^2 - \frac{R_1^2}{2} - R_1^3 \right) = C_3$$

Donc :

$$V(r) = \frac{\rho}{2 \epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$$

3°) On obtient le champ et le potentiel créés par une sphère chargée uniformément en volume de rayon  $R$  avec une densité  $\rho$  en faisant tendre  $R_1$  vers zéro et  $R_2$  vers  $R$  :

$$r < R \quad E = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} r ; \quad V(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \left( \frac{3 R^2 - r^2}{2} \right)$$

$$r > R \quad E = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} ; \quad V(r) = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{R^3}{r}$$

Il - 1°) Les charges sont maintenant réparties en surface.



Appliquons le théorème de Gauss :

$$\phi = 4 \pi r^2 E = \frac{\sum Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\nabla r < R_1 \quad 4 \pi r^2 E = 0$$

donc  $E = 0$

$$\nabla R_1 < r < R_2 \quad 4 \pi r^2 E = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

Donc

$$E = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\nabla r > R_2 \quad 4 \pi r^2 E = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}$$

Soit

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Par un raisonnement analogue au I-), les expressions du potentiel sont :

$$\nabla r > R_2$$

$$V(r) = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

car à l'infini,  $V = 0$ .

$$\nabla R_1 < r < R_2$$

$$V = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r} + C_1$$

$V$  est continue en  $r = R_2$ , soit :

$$\frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 R_2} + C_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2} \Rightarrow C_1 = \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

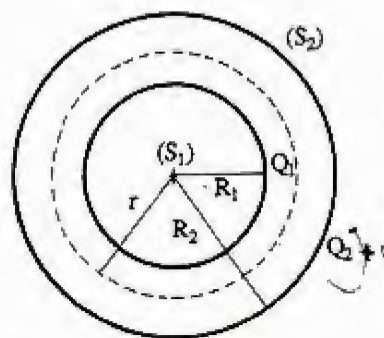
Il vient alors :

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$$

$$\nabla r < R_1 \quad V = C_2$$

$V$  est continue en  $r = R_1$ , soit :

$$V = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right)$$



2°) Quand les deux sphères sont reliées par un fil conducteur, il se produit un écoulement de charges d'une sphère à l'autre jusqu'à un nouvel état d'équilibre caractérisé par l'égalité des potentiels des deux sphères.

$$V(R_1) = V(R_2) \quad (1)$$

Soit  $q_1$  la charge portée par  $S_1$  et  $q_2, q_3$  les charges portées par la sphère  $S_2$  (figure ci-contre).

D'après 1°) la relation [1] nous permet d'écrire en considérant la nouvelle répartition des charges :

$$\frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2 + q_3}{R_2} \right) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_2 + q_3}{R_2} \right)$$

Il vient alors :

$$q_1 = 0$$

En raison de l'influence totale,  $q_1$  et  $q_2$  sont opposées :

$$q_1 + q_2 = 0 \quad \text{alors} \quad q_2 = 0$$

La charge totale est conservée :

$$q_1 + q_2 + q_3 = Q_1 + Q_2$$

soit alors :

$$q_3 = Q_1 + Q_2$$

Conclusion : Lorsqu'on relie  $S_1$  et  $S_2$  par un fil conducteur, on constitue un conducteur unique équipotentiel et non chargé à l'intérieur. Les charges  $q_1$  et  $q_2$  deviennent nulles, c'est la décharge du condensateur sphérique. La charge totale reste égale à  $Q_1 + Q_2$ , elle est localisée sur la sphère de rayon  $R_2$ . Les deux armatures conductrices sont au potentiel :

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R_2}$$

3°) a) La sphère  $S_1$  porte la charge  $Q_1$ . En raison de l'influence totale, la charge  $q_2$  située sur la paroi intérieure de la sphère  $S_2$  et  $Q_1$  sont opposées :

$$Q_1 + q_2 = 0 \quad \text{soit} \quad q_2 = -Q_1$$

La sphère  $S_2$  est initialement neutre, donc elle porte sur sa paroi extérieure une charge  $q_3 = +Q_1$ .

Puisque maintenant  $S_2$  est reliée au sol ( $V = 0$ ), sa charge extérieure  $q_3 = Q_1$  s'annule. (Elle s'écoule au sol).

Nous avons constitué donc un condensateur sphérique. Le potentiel en  $r = R_1$  est :

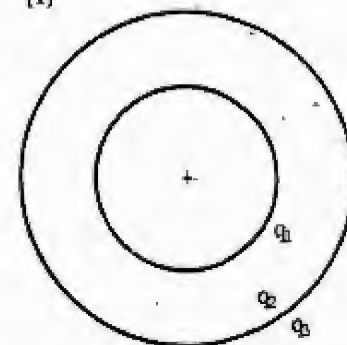
$$V(R_1) = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

La capacité d'un tel condensateur est :

$$C = \frac{Q_1}{V_1}$$

soit

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



b) Lorsque  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ , l'expression de la capacité devient :

$$C = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 (e + R_1)}{e}$$

$$C = \frac{4 \pi \epsilon_0 R_1^2}{e} \left( 1 + \frac{e}{R_1} \right)$$

Comme  $e \ll R_1$ , alors  $1 + \frac{e}{R_1} = 1$

Soit

$$C = \frac{\epsilon_0}{e} 4 \pi R_1^2 = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \text{c.q.f.d.}$$

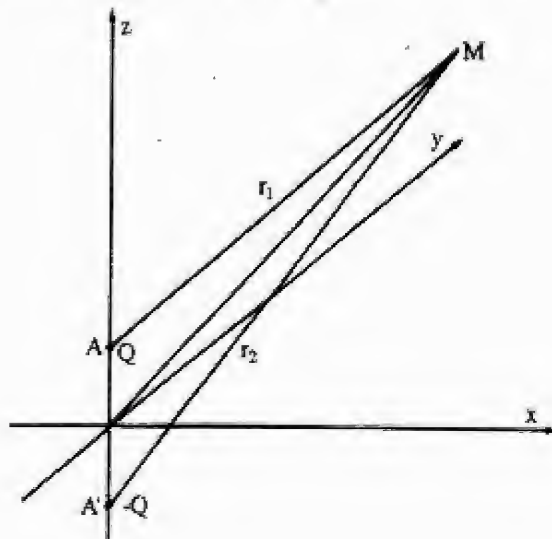
UNIVERSITE SIDI MOHAMED  
BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES  
MEKNES

Année : 1986-87  
1ère Session - 1ère partie  
Section : MI

ENONCÉ

I - Dans un repère orthonormé OXYZ, deux charges ponctuelles  $+Q$  et  $-Q$  sont placées respectivement en  $A(0, 0, h)$  et  $A'(0, 0, -h)$ . On appellera  $S_1$  ce système.  $M$  étant un point de l'espace, on prend :

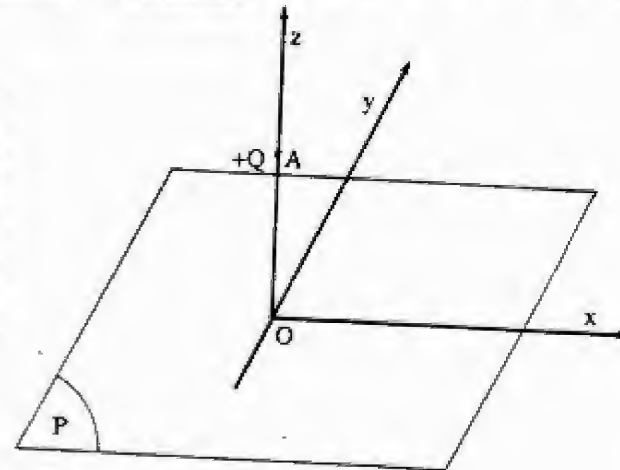
$$\vec{OM} = \vec{r}; \quad \vec{AM} = \vec{r}_1; \quad \vec{A'M} = \vec{r}_2.$$



1°) Calculer le potentiel créé par  $S_1$  en tout point de l'espace, en fonction de  $Q$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

2°) Déterminer l'équation de la surface équipotentielle  $V = 0$ . Expliciter clairement sa situation dans le repère OXYZ.

3°) Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  (module et direction) créé par  $S_1$  en tout point de l'équipotentielle  $V = 0$ ; en fonction de  $Q$ ,  $h$  et  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $x, y, z$  étant les coordonnées cartésiennes.



II - La charge  $+Q$  est toujours au point  $A(0, 0, h)$ , on élimine la charge  $-Q$ . Le plan XOY est maintenant occupé par un plan conducteur  $P$  infini, maintenu au potentiel constant  $V = 0$ . Soit  $S_2$  ce système.  $P$  est initialement neutre.

1°) Rappeler les propriétés d'un conducteur à l'équilibre.

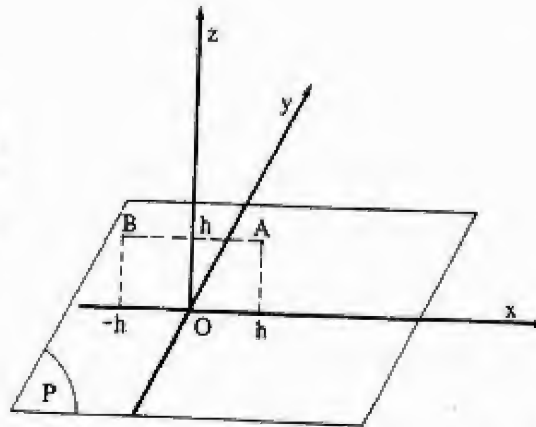
2°) A l'aide du théorème d'unicité et des propriétés des conducteurs à l'équilibre, montrer que dans le demi-espace  $z \geq 0$ , le champ et le potentiel créés par  $S_2$  sont identiques à ceux créés par  $S_1$ . On rappelle que le théorème d'unicité prévoit que pour un ensemble de charges et de conducteurs, (portés à des potentiels déterminés ou ayant des charges données), à l'équilibre le champ, le potentiel ainsi que la densité de charge électrique sont déterminés de manière unique en tout point de l'espace et en tout point des conducteurs. Inversement si une distribution de champ (ou de potentiel) électrique satisfait aux propriétés du champ électrique en tout point de l'espace et en tout point d'un système donné de conducteurs (portés à des potentiels déterminés, ou portant des charges données); cette distribution champ (ou potentiel) est la seule et unique qui corresponde à l'équilibre de système de conducteurs.

3°) Par influence le plan  $P$  acquiert une densité de charge  $\sigma$ . A l'aide du théorème de Coulomb, calculer  $\sigma$  en tout point  $M(x, y, 0)$  du plan  $P$ , en fonction de  $Q$ ,  $h$  et  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

4°) Quelle est la charge totale  $Q_P$  que le conducteur  $P$  a développée par influence ?



III - On considère maintenant le système  $S_3$  constitué du plan conducteur infini  $P$  en  $OXY$  maintenu au potentiel constant  $V = 0$  et de deux charges identiques  $+Q$  situées en  $A(h, 0, h)$  et  $B(-h, 0, h)$ .



1°) Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  (module et direction) créé par  $S_3$  en tout point  $M(x, y, 0)$  du plan  $P$ , en fonction de  $Q$ ,  $h$  et de  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

2°) En déduire la densité de charge  $\sigma(M)$  en tout point de  $P$ .

3°) Quelle est alors la charge totale  $Q$ , portée par le plan  $P$  ?

#### IV - QUESTIONS DE COURS

✗ En électrocinétique :

- Qu'est-ce qu'un réseau ?
- Quel est le but de l'étude des réseaux ?
- Quelles équations (ou lois) régissent l'étude des réseaux ? (Enoncer les explicitement).
- Quel est leur domaine de validité ?
- Quels principes ou propriétés physiques ces équations décrivent-elles ?

#### SOLUTION

1 - 1°) Le système  $S_1$  est formé de deux charges ponctuelles  $+Q$  et  $-Q$  placées en  $A$  et  $A'$ . Le potentiel créé par ce système est défini et continu partout sauf en  $A$  et  $A'$ .

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

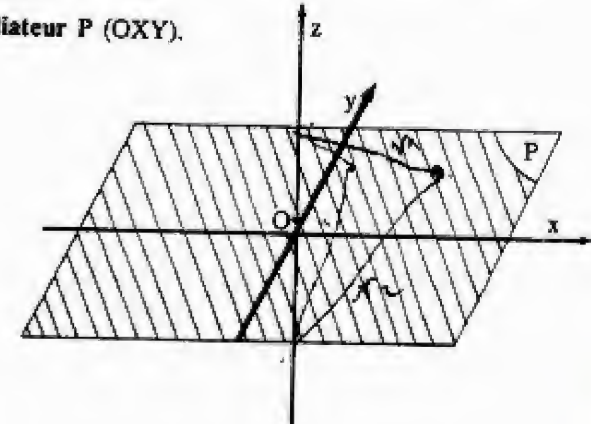
2°) Les surfaces équipotentielles s'obtiennent en faisant  $V = \text{cte}$ , elles correspondent à :

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{cte}$$

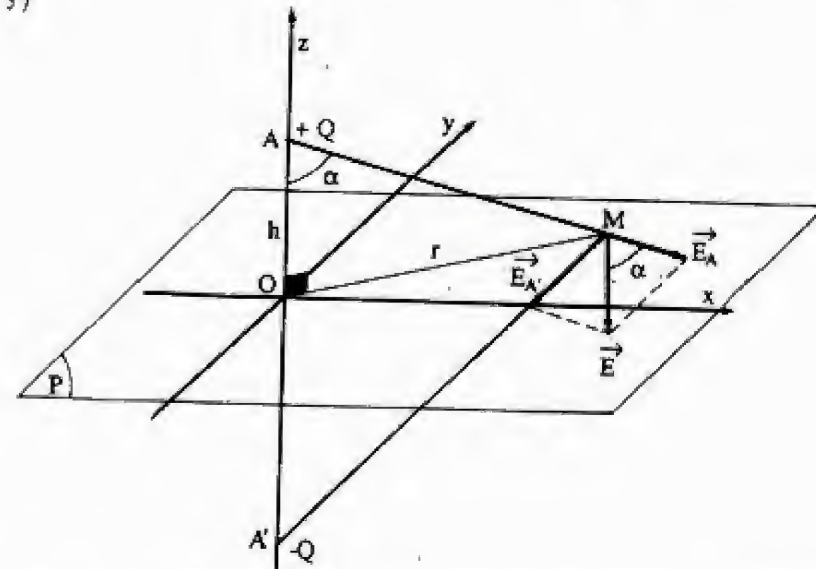
En particulier, la surface équipotentielle  $V = 0$  est le lieu des points pour lesquels :

$$r_1 = r_2$$

Cette surface est le plan médiateur  $P(OXY)$ .



3°)



Le champ en un point  $M$  de  $P$  s'obtient en composant les champs produits par les charges  $A$  et  $A'$ . Posons  $OM = r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . On a :

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{AM^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(h^2 + r^2)}$$

Le champ résultant est :

$$E = 2 E_A \cos \alpha = 2 E_A \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

D'où

$$E = \frac{Q}{2 \pi \epsilon_0} \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

$\vec{E}$  est dirigé en sens inverse de Oz.

II - 1°) Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique :

▼ Le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}.$$

▼ L'équation de Poisson montre que :  $\rho_{\text{int}} = 0$ .

▼ Comme le potentiel est continu à la traversée d'une distribution surfacique de charges :

$$V_{\text{int}} = V_{\text{surface}} = \text{cte.}$$

▼ A l'extérieur du conducteur et au voisinage immédiat de sa surface, on a :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{r}$$

2°) Considérons maintenant le système  $S_2$  formé de la charge  $+Q$  en A et du plan conducteur P. Dans le demi-espace  $z \geq 0$ , le potentiel est défini et continu, sauf en A et admet P comme surface équipotentielle de potentiel  $V = 0$ .

La fonction potentiel du système  $S_2$  est donc identique à celle créée par  $S_1$  en vertu du théorème d'unicité de la fonction potentiel lorsque la charge ou le potentiel de chaque conducteur sont fixés. Dans ce cas, la charge  $-Q$  est appelée "image" de la charge  $+Q$  dans le plan P.

3°) Par influence, le plan P acquiert une densité de charge  $\sigma$ . La densité de charge d'influence sur le plan est donnée par le théorème de Coulomb.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En comparant avec le résultat de 1-3°), on voit que  $\sigma$  est négatif car  $\vec{E}$  est dirigé vers le conducteur et donc :

$$\sigma = - \frac{Q}{2 \pi} \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

4°) Pour obtenir la charge totale, il faut intégrer sur toute la surface du plan. Prenons comme élément de surface, la couronne comprise entre les cercles de rayons  $r$  et  $r + dr$ , d'aire  $dS = 2 \pi r dr$ , elle porte la charge élémentaire :

$$dQ_P = \sigma dS$$

$$dQ_P = -Q h \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

Intégrons de  $r = 0$  à  $r = \infty$  pour avoir tout le plan.

$$Q_P = -Q h \int_0^\infty \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$Q_P = -\frac{Q h}{2} \int_0^\infty \frac{d(h^2 + r^2)}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$Q_P = -\frac{Q h}{2} \left[ \frac{-2}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right]_0^\infty$$

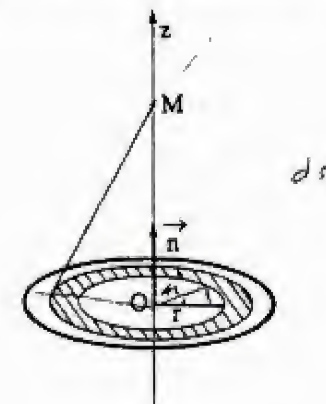
$$Q_P = -\frac{Q h}{2} \frac{2}{h}$$

Soit

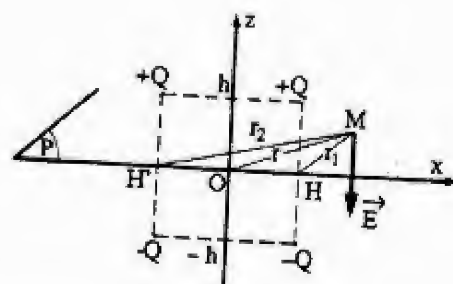
$$Q_P = -Q$$

Remarque : Ce résultat est évident a priori. En effet, toutes les lignes de forces issues de  $+Q$  rencontrent le plan P, le théorème des éléments correspondants montre que la charge d'influence est égale et opposée à la charge influençante.

III - 1°) Considérons le système  $S_3$  formé des charges  $Q$  et du plan conducteur P. Dans le demi-espace situé en haut de P sur la figure, le potentiel est défini et continu sauf en A et B et admet P comme surface équipotentielle de potentiel zéro. Considérons maintenant le système  $S'_3$  formé des deux charges  $Q$  ponctuelles positives et de deux autres charges  $-Q$  placées en A' et B'. Le potentiel créé par ce système est défini et continu partout sauf en A, B et A', B', l'une des surfaces équipotentielles est le plan P, son potentiel est zéro.







Les fonctions potentielles des systèmes  $S_3$  et  $S'_3$  sont donc identiques en vertu du théorème d'unicité de la fonction potentielle lorsque la charge ou le potentiel de chaque conducteur sont fixés.

Le champ en un point M voisin de P s'obtient en composant les champs produits par les charges A et A' d'une part et par les charges B et B' d'autre part.

Posons  $HM = r_1$  et  $H'M = r_2$ , on a d'après 2°):

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{(h^2 + r_1^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{(h^2 + r_2^2)^{3/2}}$$

Le champ résultant  $\vec{E}$  est la superposition des deux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ :  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ .

$$E = \frac{Qh}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(h^2 + r_1^2)^{3/2}} + \frac{1}{(h^2 + r_2^2)^{3/2}} \right]$$

$r_1$  est donné dans le triangle OHM par la relation :

$$r_1^2 = h^2 + r^2 - 2hr \cos \theta$$

$r_2$  est donné dans le triangle H'OM par la relation :

$$r_2^2 = h^2 + r^2 + 2hr \cos \theta$$

L'expression du champ E devient alors :

$$E = \frac{Qh}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(2h^2 + r^2 - 2hr \cos \theta)^{3/2}} + \frac{1}{(2h^2 + r^2 + 2hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

2°) La densité de charge d'influence sur le plan P est donnée par le théorème de Coulomb :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$\sigma$  est négatif car  $\vec{E}$  est dirigé vers le conducteur, d'où en identifiant :

$$\sigma = -\frac{Qh}{2\pi} \left[ \frac{1}{(2h^2 + r^2 - 2hr \cos \theta)^{3/2}} + \frac{1}{(2h^2 + r^2 + 2hr \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

3°) Pour obtenir la charge totale, il faut intégrer sur toute la surface du plan. On évite une intégration double sur  $r$  et  $\theta$  en prenant comme élément de surface la couronne comprise entre les cercles de rayons  $r$  et  $r + dr$ , d'aire  $dS = 2\pi r dr$  tout en considérant la superposition des deux densités de charges  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  provenant de  $E_1$  et  $E_2$  telle que :

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi} \frac{h}{(h^2 + r_1^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2\pi} \frac{h}{(h^2 + r_2^2)^{3/2}}$$

Le plan porte la charge  $dQ = (\sigma_1 + \sigma_2) dS$ . Soit :

$$Q_1 = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{h}{(h^2 + r_1^2)^{3/2}} 2\pi r_1 dr_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = -\frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{h}{(h^2 + r_2^2)^{3/2}} 2\pi r_2 dr_2$$

Soit

$$Q_1 = \frac{-Qh}{2} \left[ \frac{-2}{\sqrt{h^2 + r_1^2}} \right]_0^\infty = -Q; \quad Q_2 = -Q$$

La charge d'influence est donc :  $Q = Q_1 + Q_2 = -2Q$ , égale et opposée à la charge influente.

UNIVERSITE MOHAMED V  
FACULTE DES SCIENCES  
RABAT

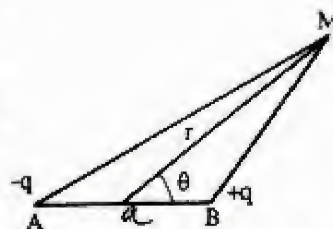
Année : 1985-86  
1<sup>ère</sup> session : 1<sup>ère</sup> partie  
Section : MPI

ENONCE

### EXERCICE 1

1- Soit un système de deux charges  $-q$  et  $+q$  placées en A et B distants de

a et formant un dipôle électrique de moment électrique  $\vec{P}$ . Donner l'expression du potentiel  $V$  en un point  $M$  quelconque de l'espace repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  ( $r \gg a$ ) (voir figure).



2- On suppose maintenant que le dipôle est placé dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$  et qu'au point  $O$  milieu de  $AB$  le potentiel de ce champ est  $V(0)$ ; l'axe du dipôle est parallèle à  $\vec{E}_0$  et de même sens.

a) Donner l'expression du potentiel  $V'$  en un point quelconque  $M$  en fonction de  $\theta$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $\vec{E}_0$  et  $V(0)$ .

b) Montrer que le potentiel  $V'$  est constant sur une sphère de rayon  $R$  dont on déterminera l'expression en fonction de  $p$  et  $E_0$ .

3- Donner les composantes radiale et orthoradiale du champ résultant  $\vec{E}$  au point  $M$ .

### EXERCICE 2

Un condensateur plan est constitué de deux armatures circulaires de rayon  $R = 10$  cm, distantes de  $e = 5$  mm et entre lesquelles on applique une tension  $V = 1000$  Volts.

On donne  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$  (M K S A)

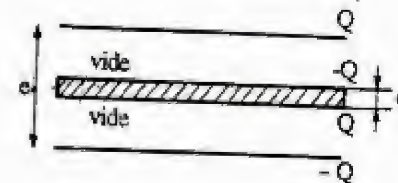
1- Calculer le champ électrique  $E$  entre les armatures et la charge  $Q$  du condensateur.

2- Le condensateur est isolé puis on introduit une lame diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  qui remplit tout l'espace entre les armatures; la tension est alors égale à  $V' = 800$  Volts.

a) Calculer la capacité  $C'$  du condensateur après introduction du diélectrique et déduire la permittivité relative  $\epsilon_r$ .

b) Calculer le champ  $E'$  entre les armatures ainsi que la charge électrique induite sur chaque face du diélectrique (charge de polarisation).

3- On suppose maintenant que la lame diélectrique de constante  $\epsilon_r$ , calculée précédemment a une épaisseur  $e'$  plus petite que l'épaisseur  $e$  du condensateur ( $e' < e$ ) si bien que la lame diélectrique baigne dans le vide entre les 2 armatures. (voir figure).



a) Calculer la capacité de ce nouveau condensateur.

b) Montrer qu'elle est indépendante de la position de la lame entre les armatures. (On supposera que les faces du diélectrique sont métallisées et parallèles aux armatures).

### SOLUTION

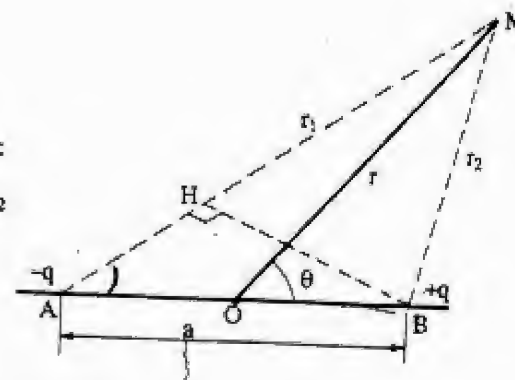
### EXERCICE 1

$$1^o) V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$r$  est supposé très grande devant  $a$ , on a :

$$r_1 - r_2 = AH = a \cos \theta \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = r^2$$

$$\text{donc : } V = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



2^o) a) Expression du potentiel  $V'$

$V'$  est dû au dipôle électrique et au champ uniforme  $\vec{E}_0$ :

$$V'(M) = V_{\text{dipôle}} + V_{\text{dû à } \vec{E}_0}$$

Le potentiel dû au champ  $\vec{E}_0$  en  $M$  est :

$$V_{E_0} = - \int E_0 dx = -E_0 x + \text{cte}$$



Or en O,  $V_E = V(0)$  donc  $cte = V(0)$  et  $x = r \cos \theta$

d'où  $V_{E_0} = V(0) - E_0 r \cos \theta$

Le potentiel en M dû au dipôle électrique est :

$$V_d = \frac{q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Le potentiel du champ résultant est donc :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos \theta + V(0) \quad (qa = p)$$

b) Le potentiel  $V(M)$  est constant si l'on :

$$\begin{aligned} cte = V(M) - V(0) &= \frac{p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos \theta \\ &= r \cos \theta \left[ \frac{p}{4 \pi \epsilon_0 r^3} - E_0 \right] \end{aligned}$$

Quand  $V(M) = V(0)$  c'est-à-dire la constante est nulle, on a :

$$\text{Soit } r \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Soit : } E_0 = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{p}{4 \pi \epsilon_0 E_0}} = cte$$

La surface équipotentielle  $V(M) = V(0)$  se compose donc :

- du plan médiateur de AB ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )

- de la sphère du centre O et de rayon  $r = \sqrt[3]{\frac{p}{4 \pi \epsilon_0 E_0}}$

3°) Le champ résultant  $\vec{E}'$  en M est égal à la somme géométrique du champ  $\vec{E}$  créé par le dipôle en M et du champ  $\vec{E}_0$  :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_0$$

Les composantes radiale et tangentielle du champ résultant  $\vec{E}'$  sont :

$$E_r' = E_r + E_0 \cos \theta$$

$$E_\theta' = E_\theta - E_0 \sin \theta$$

Calculons  $E_r$  et  $E_\theta$  : le champ électrique dérive du potentiel  $V$  :

$$\vec{E} = - \text{grad } V$$

Les composantes radiales  $E_r$  et tangentielle  $E_\theta$  sont donc

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

Le champ résultant  $\vec{E}'$  est donc :

$$E_r' = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} + E_0 \cos \theta$$

$$E_\theta' = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} - E_0 \sin \theta$$

## EXERCICE 2

$$1^\circ) E = \frac{V}{e} = 2 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

La capacité d'un tel condensateur est :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Sa charge est :

$$Q = C V = \frac{\epsilon_0 S V}{e}$$

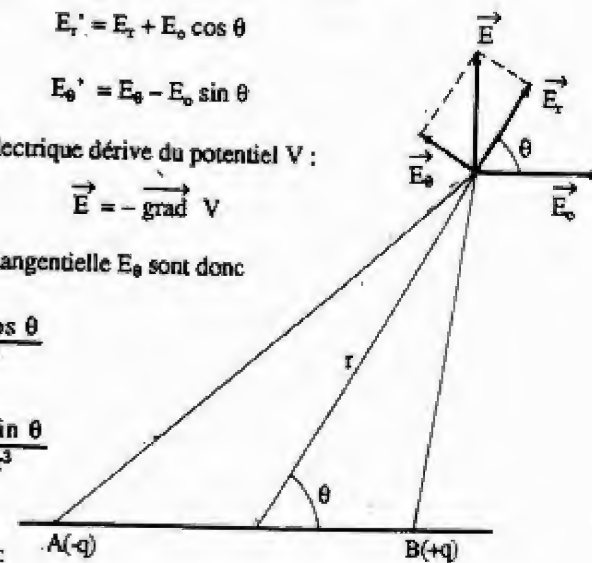
Or :

$$S = \pi R^2 \Rightarrow Q = \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V}{e}$$

AN :

$$Q = 5,56 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

2°) a) Le condensateur est isolé, donc il porte toujours la charge  $Q$  :



$$Q = C' V' \Rightarrow C' = \frac{Q}{V'}$$

A.N :

$$C' = 6,95 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

La capacité d'un tel condensateur est :  $C' = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$

ou encore :  $C' = \epsilon_r C = \epsilon_r \frac{Q}{V}$

Soit  $\epsilon_r = C' \frac{V}{Q} = \frac{Q}{V'} \frac{V}{Q} = \frac{V}{V'}$

A.N :

$$\epsilon_r = 1,25$$

b) ▼ Le champ électrique  $E'$  est lié à  $V'$  par la relation :

$$E' = \frac{V'}{e} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

▼ Les armatures portent les densités superficielles  $+\sigma$  et  $-\sigma$ . Mais il est apparu par polarisation les densités superficielles  $-\sigma'$  et  $+\sigma'$ , le champ total  $E'$  créé entre les armatures est alors :

$$E' = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

$+\sigma$	$-\sigma'$
$-\sigma$	$+\sigma'$

Il vient alors :  $\epsilon_0 E' = \sigma - \sigma'$

Soit en multipliant par  $S$  les deux membres de l'égalité :

$$\sigma' S = \sigma S - \epsilon_0 E' S$$

$$Q' = Q - \epsilon_0 S E'$$

$$Q' = \frac{\epsilon_0 S V}{e} - \frac{\epsilon_0 S V'}{e}$$

Soit donc :

$$Q' = C (V - V')$$

$$Q' = C V \left(1 - \frac{V'}{V}\right)$$

$$Q' = Q \left(\frac{V - V'}{V}\right)$$

A.N :

$$Q' = 11,2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

3°) a) Après introduction de la lame diélectrique à charge constante, il apparaît des charges de polarisation de densité superficielle  $-\sigma'$  et  $+\sigma'$  sur les faces en regard de A et B. Le champ électrique créé dans le vide entre les arma-

tures A et B est  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  car les répartitions  $+\sigma'$  et  $-\sigma'$  donne un champ nul dans cette région. Par contre le champ créé dans la lame sera au contraire :

$$E' = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

ou encore par définition de la permittivité relative  $\epsilon_r$

$$E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{E}{\epsilon_r}$$

Évaluons la circulation du champ quand on passe de A à B le long d'une ligne de champ, cette circulation est égale à la d.d.p  $V_A - V_B$  :

$$V_A - V_B = (e - e') E + e' E'$$

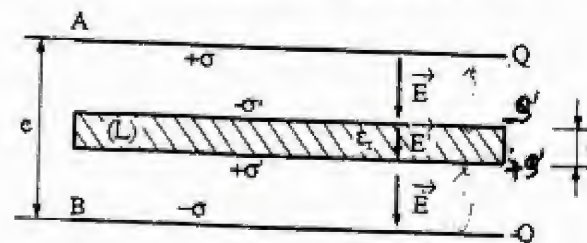
$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[ (e - e') + \frac{e'}{\epsilon_r} \right]$$

Or :

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \text{et} \quad Q = C (V_A - V_B)$$

d'où :

$$V_A - V_B = \frac{Q}{S \epsilon_0} \left[ (e - e') + \frac{e'}{\epsilon_r} \right]$$





Soit :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{(\epsilon - \epsilon') + \frac{\epsilon'}{\epsilon_r}}$$

Remarque : Nous pouvons retrouver ce résultat sans introduire les charges de polarisation du diélectrique : le condensateur peut être considéré comme une association en série de deux

condensateurs : l'un à air, de capacité  $C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{\epsilon - \epsilon'}$  et l'autre à lame diélectrique de capacité

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{\epsilon'}$$

Nous avons :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

d'où

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{(\epsilon - \epsilon') + \frac{\epsilon'}{\epsilon_r}}$$

b) Nous remarquons aisément à partir de l'expression de la capacité  $C$  qu'elle est indépendante de la position de la lame entre les armatures.

UNIVERSITE CADI AYYAD  
FACULTE DES SCIENCES  
AGADIR

Année : 1984 - 85  
1<sup>ère</sup> session : 2<sup>ème</sup> parti  
Section : PC

ENONCÉ

I - 1<sup>o</sup> On place en deux points A et B, distants de  $2a$ , deux charges  $-q$  en A et  $+q$  en B. On désigne par  $O$  le milieu de AB, par  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r$  les

distances respectives d'un point M à A, B et  $O$  et par  $\theta$  l'angle ( $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OM}$ ).

a) Exprimer  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $a$ ,  $r$  et  $\theta$ .

b) Donner l'expression du potentiel  $V$  créé en M par les deux charges en fonction de  $q$ ,  $a$ ,  $r$ , et  $\theta$ . On supposera que  $a \ll r$  et on utilisera une expression approchée de  $\frac{1}{r_1}$  et de  $\frac{1}{r_2}$ .

c) Représenter les lignes de champ et les équipotentielles. Indiquer le lieu des points où  $V = 0$  (équipotentielle zéro). On donne  $a = 4 \text{ cm}$ .

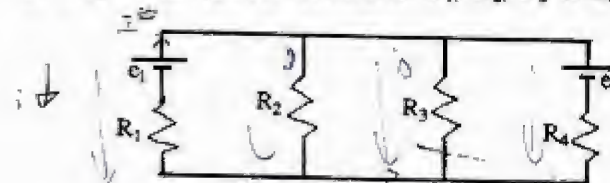
2<sup>o</sup> Au point A on remplace la charge  $-q$  par une charge  $-\alpha q$  où  $\alpha$  est un nombre réel strictement positif et inférieur à 1 ( $0 < \alpha < 1$ ). Au point B on garde la même charge  $+q$ .

a) Montrer que l'ensemble des points d'un plan contenant AB où  $V = 0$  est un cercle dont on déterminera le rayon  $R$  et la position  $x_0$  du centre  $C$  en fonction de  $a$  et de  $\alpha$ . Il est conseillé de mettre l'équation  $V = 0$  sous la forme  $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$  où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère  $oxy$  avec  $ox$  parallèle à AB.

b) Représenter cet ensemble de points ainsi que les lignes de champ qui le traversent. On donne  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

c) Exprimer le potentiel  $V$  créé en M en fonction de  $q$ ,  $a$ ,  $r$ ,  $\theta$  et  $\alpha$ . Utiliser les mêmes approximations qu'en 1<sup>o</sup>-b).

II - On considère un réseau constitué de deux générateurs de force-électromotrices  $e_1$  et  $e_2$  et de quatre résistances  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$  ainsi schématisé :



1<sup>o</sup> Donner l'expression du courant  $I$  dans la branche contenant le générateur  $e_1$  et la résistance  $R_1$ . On pourra utiliser les lois de Kirchhoff.

2<sup>o</sup> Quelle doit être la valeur de la f.e.m  $e_2$  pour que le courant  $I$  soit nul. On donne :  $e_1 = 1,5 \text{ volts}$ ,  $R_2 = R_3 = 10 \Omega$  et  $R_4 = 5 \Omega$ .

3<sup>o</sup> Calculer numériquement, dans ce cas, les courants dans les résistances  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ .

4<sup>o</sup> Indiquer sans calcul si pour d'autres valeurs des éléments du circuit on peut annuler le courant dans une autre branche du réseau ?

III - 1<sup>o</sup> Un fil rectiligne de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité  $i$  constante. Calculer à l'aide du théorème d'Ampère le module du champ magnétique  $B$  en un point M situé à la distance  $r$  du fil.

2<sup>o</sup> On dispose côte à côte sur une surface cylindrique illimitée de rayon  $R$  un certain nombre de fils identiques au précédent et parcourus dans le

même sens par le même courant  $i$ . Ces fils sont disposés parallèlement aux génératrices de la surface cylindrique (figure 1).

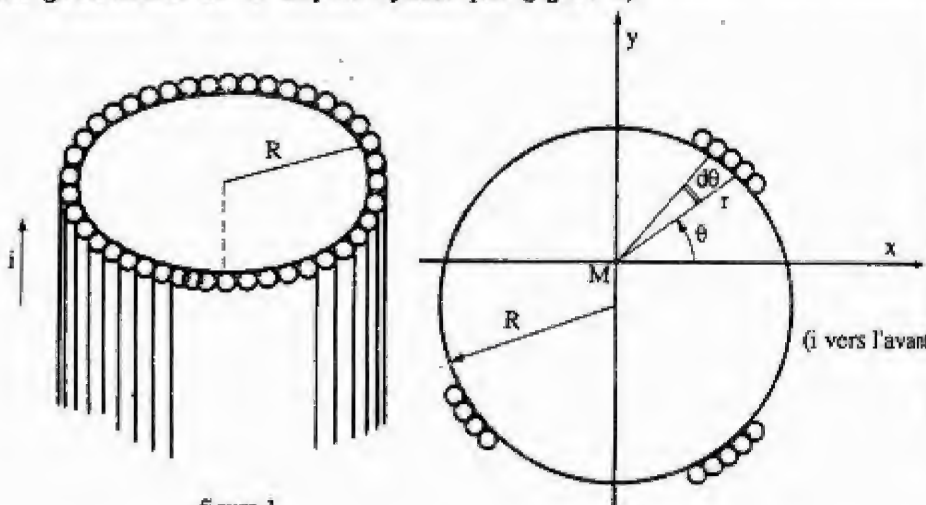


figure 1

figure 2

a) Calculer à l'aide du théorème d'Ampère le champ magnétique créé par cet ensemble de fils en un point  $M$  situé à la distance  $d$  de l'axe du cylindre. Distinguer les cas  $d > R$  et  $d < R$ . On désignera par  $I$  la somme des courants  $i$ .

b) Montrer par le calcul, sans l'aide du théorème d'Ampère, que le champ magnétique à l'intérieur du cylindre est nul. On désignera par  $n$  le nombre de fils mis côte à côte par unité de longueur. Il est conseillé de vous aider de la figure 2 et de calculer les composantes  $B_x$  et  $B_y$  du champ résultant.

## SOLUTION

I - 1°) a) On a les relations suivantes :

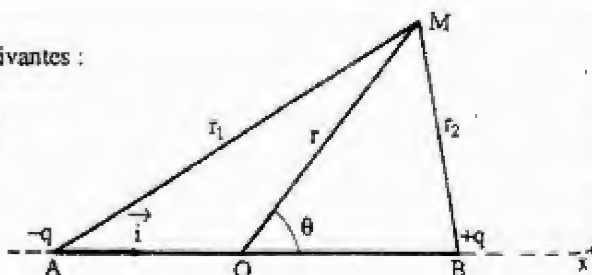
$$\vec{AO} + \vec{OM} = \vec{AM}$$

et  $\vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OM}$

ou encore :  $a \vec{i} + \vec{r} = \vec{r}_1$

et  $a \vec{i} + \vec{r}_2 = \vec{r}$

On déduit après avoir élevé au carré ces expressions :



$$r_1 = (r^2 + a^2 + 2 a r \cos \theta)^{1/2}$$

$$r_2 = (r^2 + a^2 - 2 a r \cos \theta)^{1/2}$$

b) Le potentiel  $V$  du dipôle est la somme algébrique du potentiel de la charge  $-q$  et de la charge  $+q$

$$V(M) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

La distance  $r$  étant grande devant  $a$ , nous pouvons effectuer le calcul de  $V(M)$  à l'aide d'un développement limité. Le terme de 1er ordre en  $\frac{a}{r}$  étant nul, il faut donc poursuivre le développement jusqu'au second ordre :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2 a \cos \theta}{r} \right)^{1/2}}$$

Soit

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{2 r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

par un raisonnement analogue on a :

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{2 r^2} (-3 \cos^2 \theta + 1) \right]$$

D'où on tire  $V(M)$

$$V(M) = \frac{2 q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \quad [1]$$

c) La relation  $\vec{E} = - \text{grad } V$  donne pour les composantes radiale et orthoradiale les expressions :

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Soit d'après [1] :

$$E_r = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{4 q a \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2 q a \sin \theta}{r^3}$$

On appelle ligne de champ, une ligne de l'espace telle qu'en tout point  $M$  de cette ligne, la tangente et le vecteur champ  $\vec{E}(M)$  soient parallèles.

Soit :

$$\vec{E}(M) = k \vec{d}$$



$$E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = k \left( dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \right)$$

Il vient alors :

$$E_r = k dr \quad \text{et} \quad E_\theta = k r d\theta$$

Les lignes de champ ont alors pour équation différentielle :

$$\frac{E_r}{dr} = \frac{E_\theta}{r d\theta}$$

donc

$$\frac{dr}{r} = \frac{E_r d\theta}{E_\theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

En intégrant

$$\text{Log } r = 2 \text{Log } \sin \theta + \text{Log } k$$

Soit

$$r = k \sin^2 \theta$$

k étant une constante.

▼ Les surfaces équipotentielles sont définies par  $V = \text{cte}$

Donc

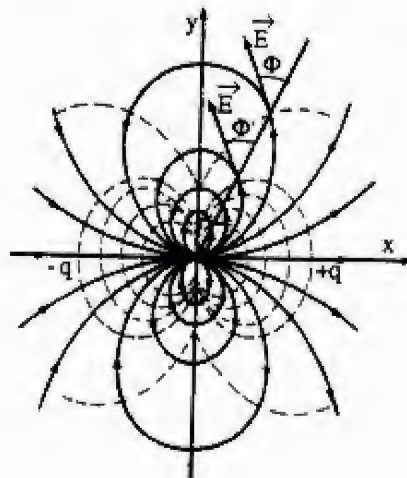
$$V = \frac{2 q a \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \text{cte}$$

Ainsi

$$r^2 = K \cos \theta$$

K étant une constante.

▼ Ces deux équations définissent deux familles de courbes orthogonales.



▼ L'équipotentielle zéro est le plan médiateur de AB.

$$2^\circ) \quad V(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

$$\text{où} \quad q_1 = -\alpha q \quad \text{et} \quad q_2 = +q$$

Les points où  $V(M) = 0$  sont définis par :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{-q_1}{q_2} = \alpha \quad \Rightarrow \quad r_1^2 = \alpha^2 r_2^2 \quad [1]$$

Dans un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les composantes de A, B et M sont :

$$A(-a, 0); \quad B(a, 0) \quad \text{et} \quad M(x, y)$$

On a :

$$r_1^2 = AM^2 = (x+a)^2 + y^2$$

$$r_2^2 = BM^2 = (x-a)^2 + y^2$$

La relation [1] nous permet d'écrire :

$$(x+a)^2 + y^2 = \alpha^2(x-a)^2 + \alpha^2 y^2$$

$$x^2(1-\alpha^2) + 2xa(1+\alpha^2) + a^2(1-\alpha^2) + y^2(1-\alpha^2) = 0$$

$$\left[ x + \frac{a(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)} \right]^2 + y^2 = \frac{2a^2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$(x-x_0)^2 + y^2 = R^2$$

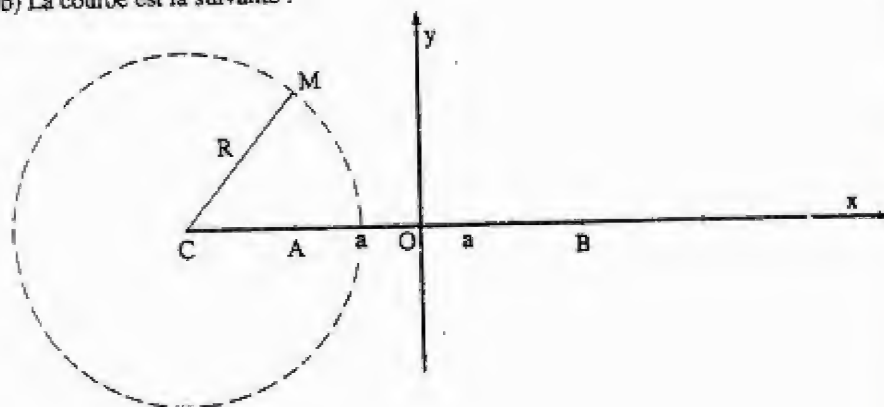
où

$$R = \frac{2a\alpha}{1-\alpha^2}$$

$$\text{et} \quad x_0 = -a \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

Donc  $|x_0| > a$  et donc le centre du cercle (où  $V = 0$ ) est à gauche de A (figure ci-dessous)

b) La courbe est la suivante :



A.N :  $a = 4 \text{ cm}$        $\alpha = \frac{1}{3}$

$$R = \frac{2 a \alpha}{1 - \alpha^2} \quad \text{soit}$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

$$x_o = -a \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad \text{soit}$$

$$x_o = -5 \text{ cm}$$

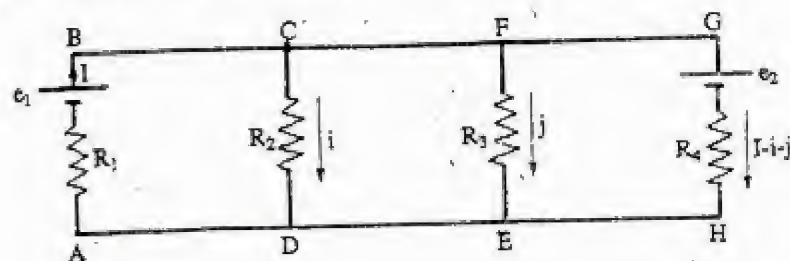
c) Rappelons l'expression de  $V(M)$  :

$$V(M) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{\alpha}{r_1} \right)$$

en utilisant les expressions de  $\frac{1}{r_1}$  et  $\frac{1}{r_2}$ , nous tirons :

$$V(M) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[ (1 - \alpha) + (1 + \alpha) \frac{a}{r} \cos \theta \right] + 0 \left( \frac{a^2}{r^2} \right)$$

II- 1°) Considérons le réseau ci-dessous :



Soit  $I$  l'intensité dans la branche AB;  $i$  dans CD, et  $j$  dans EF; la loi aux noeuds donne l'intensité dans la branche GH (soit  $I-i-j$ ). La loi aux mailles fournit :

$$\text{maille ABCD: } R_1 I - e_1 + R_2 i = 0 \quad [1]$$

$$\text{maille ABFE: } R_1 I - e_1 + R_3 j = 0 \quad [2]$$

$$\text{maille CFED: } R_3 j - R_2 i = 0 \quad [3]$$

$$\text{maille ABGHA: } R_1 I - e_1 + R_4 (I - i - j) + e_2 = 0 \quad [4]$$

On tire  $i$  et  $j$  des deux premières relations et on les porte dans la dernière, il vient :

$$i = \frac{e_1 - R_1 I}{R_2} \quad ; \quad j = \frac{e_1 - R_1 I}{R_3}$$

$$I = \frac{e_1 (R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4) - e_2 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4}$$

2°) L'intensité  $I$  sera nulle si :

$$e_2 = e_1 \frac{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_2 R_3}$$

A.N :

$$e_2 = 1,5 \frac{100 + 50 + 50}{100}$$

$$e_2 = 3 \text{ V}$$

3°) Dans le cas où  $i = 0$ , on a :

$$e_1 = R_2 i \quad \text{soit} \quad i = \frac{e_1}{R_2}$$

$$e_1 = R_3 j \quad \text{soit} \quad j = \frac{e_1}{R_3}$$

A.N.  $i = 0,15 \text{ A}$       circulant dans  $R_2$

$j = 0,15 \text{ A}$       circulant dans  $R_3$

$I - i - j = -0,3 \text{ A}$  circulant dans  $R_4$  (dans le sens contraire de celui indiqué sur le schéma)



4°) Par raison du symétrie, on peut annuler le courant dans la branche contenant le générateur 2 et la résistance  $R_4$ .

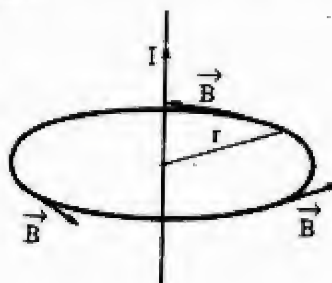
III - 1°) Les lignes de champ étant des cercles concentriques centrés sur le fil, on évalue la circulation de  $\vec{B}$  le long du cercle (C) de rayon  $r$  (figure).

$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_{(C)} dl = 2\pi r B$$

car  $B$  est constant le long du cercle.

Le théorème d'Ampère implique:

$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



D'où

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2°) a) Les lignes de champ sont là aussi des cercles concentriques, centrés sur l'axe du cylindre, on calcule la circulation de  $\vec{B}$  le long de cercle (C) de rayon  $d$

$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi B d$$

Le théorème d'Ampère nous implique :

Pour  $d > R$  :

$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i = \mu_0 I$$

D'où

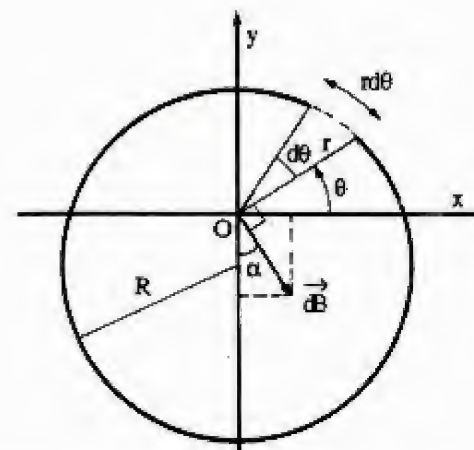
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Pour  $d < R$  : pas de courant qui traverse le cercle d'Ampère,

Donc

$$B = 0$$

b)



Le champ créé par un fil parcouru par l'intensité de courant  $i$  et à une distance  $r$  est :

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Calculons l'élément du champ magnétique  $d\vec{B}$  créé par un élément du cylindre contenant  $n$  fils par unité de longueur à une distance  $r$  :

$$dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} (n r d\theta) = \frac{\mu_0 n i}{2\pi} d\theta$$

La projection de  $d\vec{B}$  sur les axes  $x$  et  $y$  donne :

$$dB_x = \frac{\mu_0 n i}{2\pi} \sin \theta d\theta$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 n i}{2\pi} \cos \theta d\theta$$

Le champ total  $B$  est la somme de tous les  $d\vec{B}$ , soit :

$$B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 n i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

$$B_y = \int dB_y = \frac{\mu_0 n i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

Donc:

$$B = 0$$

 UNIVERSITE CADI AYYAD  
FACULTE DES SCIENCES  
AGADIR

 Année : 1985-86  
1<sup>ère</sup> session : 2<sup>ème</sup> partie  
Section : PCI

ENONCE

 I- 1<sup>o</sup>) a) Enoncer et formuler le théorème de Gauss en électrostatique.

 b) Calculer au moyen du théorème de Gauss le champ créé par un plan infini, uniformément chargé de densité superficielle de charges  $\sigma$ .

 c) En déduire le champ créé entre les armatures d'un condensateur plan chargé de densité de charges  $\sigma$ .

 2<sup>o</sup>) On considère un condensateur plan dont les armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) portées respectivement aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , ( $V_1 > V_2$ ), sont disposées horizontalement dans le vide. Ces armatures de forme carrée ayant chacune une surface  $S$ , sont distantes de  $e$ ; elles portent sur leurs faces en regard les charges  $+q$  et  $-q$ . On admet que le champ est uniforme entre les armatures.

 a) Déterminer le potentiel en un point  $M$  d'ordonnée  $z$  (axe  $Oz$  vertical orienté positivement vers le haut avec  $O$  placé sur l'armature inférieure portée au potentiel  $V_1$ ;  $z$  est compris entre 0 et  $e$ ).

 b) Calculer la capacité  $C$  de ce condensateur.  
Application numérique :  $s = 4 \text{ cm}^2$ ,  $e = 1 \text{ cm}$ .

 c) Calculer l'intensité de la force électrostatique que les armatures exercent l'une sur l'autre.  
Application numérique :  $V_1 - V_2 = 300 \text{ V}$ .

 3<sup>o</sup>) On place entre les armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) (toujours maintenues respectivement aux potentiels constants  $V_1$  et  $V_2$ ) et en coïncidence avec un

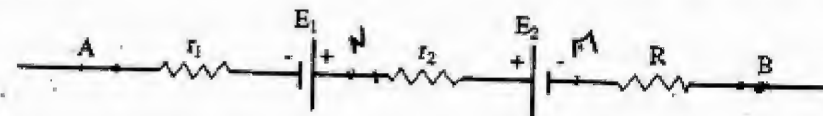
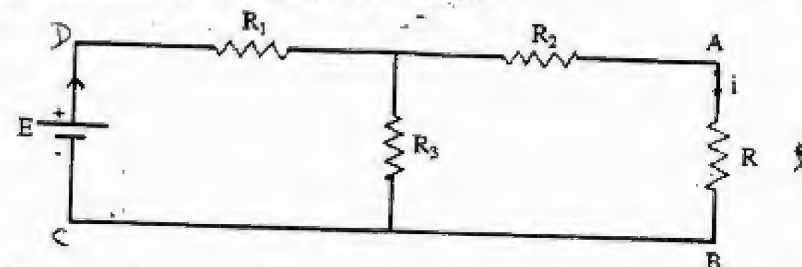
 Plan horizontal intermédiaire d'ordonnée  $z$ , une lame métallique ( $L$ ) très mince de forme carrée (même surface  $S$  que précédemment) et maintenant au moyen d'un générateur, à un potentiel  $V$ . ( $V_2 < V < V_1$ ). On admet que la distribution des charges sur les divers faces est uniforme et que les divers champs créés sont uniformes.

 a) Soient  $q_1$  et  $-q_2$ , les charges réparties sur les faces en regard des armatures ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) du condensateur initial. Quelles sont les charges réparties sur la face inférieure et la face supérieure de ( $L$ ) et la valeur des capacités  $C_1$  et  $C_2$  des deux condensateurs constitués par ( $A_1$ ) et ( $L$ ) d'une part et ( $L$ ) et ( $A_2$ ) d'autre part.

 b) En déduire la grandeur des charges  $q_1$  et  $q_2$  en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V$  et  $z$ , ainsi que l'intensité des forces électrostatiques  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  agissant respectivement sur les faces inférieures et supérieures de ( $L$ ).

 c) Déterminer en fonction de  $z$ , l'intensité et le sens de la force électrostatique  $\vec{F}$  s'exerçant sur ( $L$ ). Pour quelle valeur de  $z$  a-t-on l'équilibre ?

 d) Calculer  $\vec{F}$  dans le cas où  $z = \frac{e}{2}$  et,  $V = \frac{V_1 + V_2}{2} + \Delta V$   
avec  $\Delta V = 10 \text{ Volts}$ .

 II- 1<sup>o</sup>) Exprimer  $V_A - V_B$  en fonction des caractéristiques du circuit indiqué ci-dessous :

 2<sup>o</sup>) Calculer au moyen du théorème de Thevenin le courant  $i$  qui circule dans la résistance  $R$  du circuit ci-dessous :

 Application numérique :  $R_1 = R_2 = 1 \Omega$  ;  $R = R_3 = 2 \Omega$  ;  $E = 9 \text{ Volts}$ .

III - Enoncer et formuler la loi de Biot et Savart en électromagnétisme.



**SOLUTION** Soit alors:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{E}' = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{n}'$$

**1- 1°) a) Enoncé du théorème de Gauss**

"Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée  $S$  est égal au quotient par  $\epsilon_0$  de la somme algébrique des charges situées à l'intérieur de  $S$ "

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} [\sum Q_i \text{ intérieures à } S]$$

**b) Champ créé par un plan indéfini**

Par raison de symétrie, les lignes de champ sont normales au plan  $P$ , elles sont donc parallèles entre elles; le champ est uniforme de chaque côté du plan  $P$ , mais le sens est opposé part et d'autre de  $P$ .

Prenons un cylindre dont la surface latérale est formée de lignes de champ et dont les deux bases,  $dS$  et  $dS'$  ( $dS = dS'$ ), leurs sont normales: il n'y a de flux donc qu'à travers ces deux bases.

La charge intérieure à ce cylindre est :

$$dQ = \sigma dS$$

Des deux côtés du plan  $P$ , les champs électriques sont égaux et opposés :

$$\vec{E} = -\vec{E}'$$

Soit avec :  $\vec{n}' = -\vec{n}$ , nous avons alors :  $\vec{E}' \cdot \vec{n}' = \vec{E} \cdot \vec{n}$

$$\text{Le flux sortant total est : } d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} + \vec{E}' \cdot d\vec{S}' = 2 E dS$$

Le théorème de Gauss permet d'écrire

d'où en identifiant

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

**c) Champ créé entre les armatures d'un condensateur**

Le condensateur plan est formé de deux plans  $P$  et  $P'$  respectivement chargés par  $+\sigma$  et  $-\sigma$ . Cette répartition correspond à la superposition de deux répartitions précédentes ayant entre elles une translation de  $d$  et un changement de signe.

Désignons par  $\vec{E}_+$  ( $\vec{E}_-$ ) le champ créé par les charges  $+\sigma$  ( $-\sigma$ )

A l'intérieur :

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

D'après b), nous avons :

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{n}$$

$$\vec{E}_- = \frac{(-\sigma)}{2 \epsilon_0} \vec{n}' \quad \text{ou} \quad \vec{n}' = -\vec{n}$$

Il vient alors :

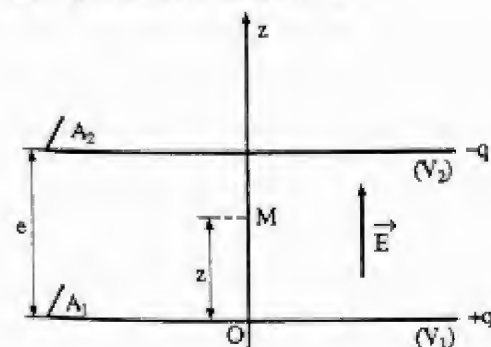
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} (\vec{n} - \vec{n}') = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} 2 \vec{n}$$

Soit :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

**Remarque :** A l'extérieur,  $\vec{E}_+$  et  $\vec{E}_-$  sont de même module, mais de signe contraire. Donc, le champ créé par ce condensateur à l'extérieur des armatures est nul.

**2°) a) Détermination du potentiel en un point M**



le champ électrostatique dérive d'un potentiel  $V$  défini par la relation :  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$

$\vec{E}$  est dirigé suivant Oz, donc :  $E = -\frac{dV}{dz}$

Soit alors : 
$$dV = - \int E dz = - \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz$$

Donc : 
$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + \text{cte}$$

L'armature inférieure placée en  $z = 0$  est portée au potentiel  $V_1$  donc :  $V_1 = \text{cte}$ .

Il vient alors :

$$V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + V_1 \quad [1]$$

b) Capacité  $C$  du condensateur

En  $z = e$ , le potentiel est  $V_2$ . Donc d'après la relation [1], on a :

$$V_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} e + V_1$$

Soit alors : 
$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \frac{e}{S} = q \frac{e}{\epsilon_0 S}$$

La capacité du condensateur est donc :

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

A.N :  $C = 35 \text{ pF}$

c) Force  $F$  agissante sur chaque armature

Sur un élément de surfaces  $dS$  s'exerce la force  $d\vec{F}$ , dirigée vers l'extérieur du conducteur

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} dS \vec{n}$$

La force agissante sur une armature est alors :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} dS \vec{n}$$

d'où

$$F = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} S$$

Or

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

Il vient alors :

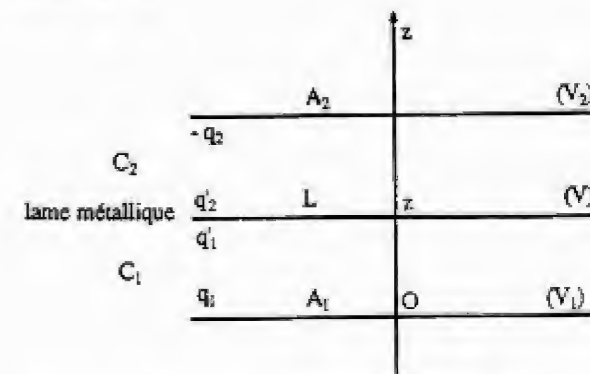
$$F = \frac{\epsilon_0 S}{2 e^2} (V_1 - V_2)^2 \quad [2]$$

ou encore en tenant compte de l'expression de  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$  :

$$F = \frac{C}{2} (V_1 - V_2)^2$$

A.N :  $F = 15,75 \cdot 10^{-4} \text{ N}$

(3°) a)



En raison de l'influence totale de chaque condensateur constitué, on a :

$$q'_1 = -q_1 \quad \text{et} \quad q'_2 = +q_2$$

D'après la définition de la capacité d'un condensateur, on a :

$$q_1 = C_1 (V_1 - V) \quad \text{et} \quad q_2 = C_2 (V - V_2)$$



d'où  $C_1 = \frac{q_1}{V_1 - V} = \frac{\epsilon_0 S}{z}$  [3]

et  $C_2 = \frac{q_2}{V - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{e - z}$  [4]

b) Des relations [3] et [4], nous tirons :

$$q_1 = \frac{\epsilon_0 S}{z} (V_1 - V) \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{\epsilon_0 S}{e - z} (V - V_2)$$

▼ A partir de l'expression [2] de l'intensité de force électrostatique  $\vec{F}$ , nous déduisons  $\vec{F}$ . A.N :  $z = \frac{e}{2}$  et  $V = \frac{V_1 + V_2}{2} + \Delta V$

$\vec{F}_2$  agissant sur les faces inférieures et supérieures de (L) :

$$F_1 = \frac{\epsilon_0 S}{2 z^2} (V_1 - V)^2$$

$$F_2 = \frac{\epsilon_0 S}{2 (e - z)^2} (V - V_2)^2$$

c) ▼ La force électrostatique  $\vec{F}$  s'exerçant sur (L) est produite par  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

En module :

$$F = |F_2 - F_1|$$

$$F = \frac{\epsilon_0 S}{2} \left[ \frac{(V - V_2)^2}{(e - z)^2} - \frac{(V_1 - V)^2}{z^2} \right]$$

Si  $F_2 > F_1$ ,  $\vec{F}$  est alors de même sens que  $\vec{F}_2$  et (L) tend vers l'armature  $A_2$ . Mais si  $F_1 > F_2$ , alors  $\vec{F}$  est du sens de  $\vec{F}_1$  et donc (L) tend vers  $A_1$ .

▼ L'équilibre de la lame (L) s'obtient quand  $F = 0$ , donc :

$$\frac{(V - V_2)^2}{(e - z)^2} = \frac{(V_1 - V)^2}{z^2}$$

Soit

$$\frac{V - V_2}{e - z} = \frac{V_1 - V}{z}$$

$$z(V - V_2 + V_1 - V) = e(V_1 - V)$$

D'où

$$z = e \frac{(V_1 - V)}{(V_1 - V_2)}$$

d) Calcul de  $\vec{F}$

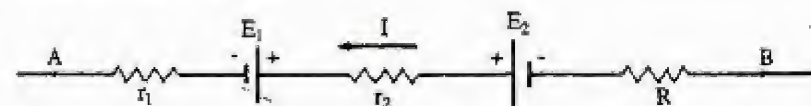
$$F = \frac{\epsilon_0 S}{2} \left[ \frac{(V - V_2)^2}{(e - z)^2} - \frac{(V_1 - V)^2}{z^2} \right]$$

Soit

$$F = 4 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

$\vec{F}$  est dirigée dans le sens de  $\vec{F}_2$  ((L) tend à s'approcher de  $A_2$ )

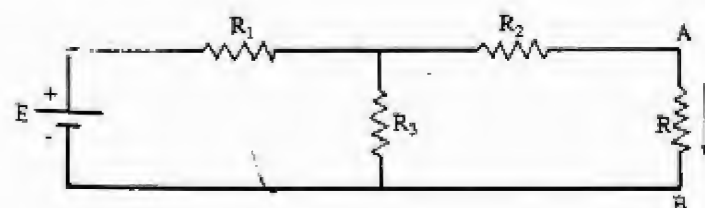
II- 1°) Soit le circuit ci-dessous :



D'après la loi de Pouillet :

$$V_A - V_B = E_2 - E_1 - (R + r_1 + r_2) I$$

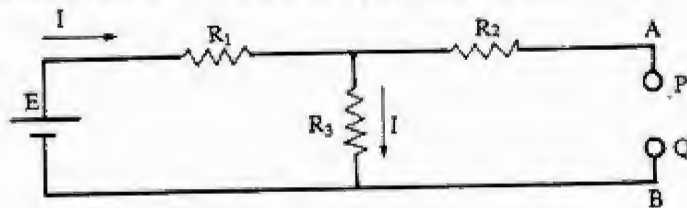
2°) Considérons le circuit ci-dessous :



Calculons l'intensité  $i$  du courant circulant dans la branche AB en utilisant le théorème de Thévenin.

▼ Calcul de la f.e.m  $E_o$ .

Effectuons une coupure PQ entre A et B, ce qui entraîne un courant nul dans la branche AB



et l'intensité dans le reste du circuit est :

$$I = \frac{E}{R_1 + R_3}$$

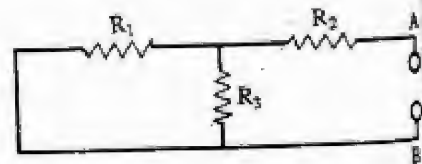
Donc la tension entre P et Q est :

$$E_o = R_3 I = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E$$

▼ Calcul de  $R_o$

On supprime E. La résistance  $R_o$  équivalente du circuit entre P et Q est :

$$R_o = R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}}$$



Soit :

$$R_o = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

▼ L'intensité du courant qui circule dans AB est donc :

$$i = \frac{E_o}{R_o + R}$$

$$\text{A.N : } E_o = 6 \text{ Volts ; } R_o = \frac{5}{3} \Omega$$

$$\text{Soit } i = \frac{6}{\frac{5}{3} + 2} = \frac{18}{11} \quad \text{où}$$

$$i = 1,64 \text{ A}$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
CASABLANCA

Année : 1985-86  
1<sup>ère</sup> session : 2<sup>ème</sup> partie  
Section : PCI

ENONCE

On considère un tore engendré par un cercle de rayon  $a$ , dont le centre décrit un cercle de diamètre  $D$ , tel que  $D \gg a$ . On bobine sur ce tore, constitué d'une matière de même perméabilité magnétique que le vide ( $\mu_0$ ),  $N$  tours d'un fil de cuivre de diamètre  $d$  ( $d \ll a$ ). On admettra qu'aucune ligne d'induction magnétique ne s'échappe du tore. Le fil de résistance totale égale à  $R$  est parcouru par un courant d'intensité  $I_1$  issu d'un générateur de f.e.m  $E_1$ .

1°) Donner l'expression du champ magnétique au centre du tore, montrer rapidement qu'il est uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur du tore.

2°) Calculer l'énergie magnétique dite localisée du tore, en déduire le coefficient de self-induction  $L_1$  du tore.

3°) Donner l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}$  en tout point de l'espace ( $r \geq a$  et  $r \leq a$ ) en utilisant la relation :

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

4°) Par dessus le bobinage précédent, on enroule une deuxième couche de fil comprenant  $n$  spires au total et de rayon  $a$ , on coupe brusquement la f.e.m  $E_1$ , étudier la variation dans le temps de  $I_1(t)$ ?

5°) Etablir la loi de variation de la f.e.m induite  $E_2(t)$  dans le deuxième bobinage ? Quel est le sens du courant induit ?

6°) En reprenant l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}$  établie dans la question 3°), retrouver le f.e.m  $E_2(t)$  du second bobinage, en utilisant

$$\vec{E}_2 = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ?$$



1°) ▼ La symétrie du problème implique que les lignes de champ sont des cercles concentriques au tore.

Soit (C) une ligne de champ circulaire intérieure au tore à une distance  $\frac{D}{2}$  du centre; le vecteur  $\vec{B}$  en chaque point de (C) a le même module.

Calculons la circulation de  $\vec{B}$  le long du contour (C)

$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi \frac{D}{2} = B\pi D$$

(C) traverse les N spires dans le même sens.

D'après le théorème d'Ampère :

$$B\pi D = \mu_0 N I_1$$

Soit

$$B = \frac{\mu_0 N}{\pi D} I_1$$

▼ Pour tout contour extérieur au tore, le courant total embrassé est nul; il en résulte que le champ est nul dans tout l'espace extérieur au tore.

▼ Calculons la valeur du champ au bord du tore en utilisant le théorème d'Ampère :

$$\int \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I_1$$

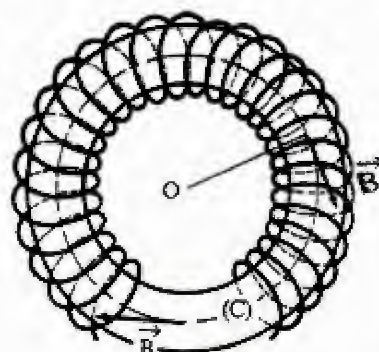
$$B' \cdot 2\pi \left( \frac{D}{2} + a \right) = \mu_0 N I_1$$

Soit

$$B' = \frac{\mu_0 N I_1}{\pi D \left( 1 + \frac{2a}{D} \right)}$$

Or  $2a \ll D$  donc :

$$1 + \frac{2a}{D} \approx 1$$



Soit

$$B' = \frac{\mu_0 N I_1}{\pi D} = B$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est alors uniforme à l'intérieur du tore.

2°) L'énergie magnétique enmagasiné par unité de volume du tore est :

$$\frac{dW}{dv} = \frac{B^2}{2\mu_0} \rightarrow W = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dv$$

Soit :

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V$$

car  $B = \text{cte}$  et  $V$  est le volume du tore :  $V = \pi a^2 \cdot \pi D$

Il vient alors

$$W = \frac{\mu_0}{2D} N^2 a^2 I_1^2$$

D'autre part:

$$W = \frac{1}{2} L I_1^2$$

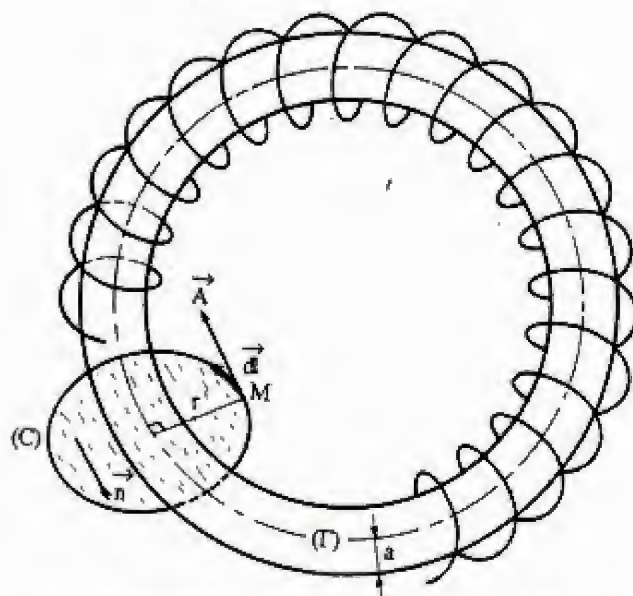
D'où la self-inductance:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{D}$$

3°) ▼ Considérons l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(C)} \frac{d\vec{l}}{r}$  pour un conducteur (C) linéique.

En raison de la symétrie du système, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est tangent au cercle de rayon  $r$  et d'axe celui du tore ( $\Gamma$ ); cette révolution autour de ( $\Gamma$ ) permet d'affirmer que  $A$  n'est fonction que de  $r$ .

- Calculons le flux sortant à travers la surface (S) déterminée par la circonférence (C). (voir figure ci-dessous)



▼  $r > a$  : Le champ magnétique n'existe qu'à l'intérieur du tore, c'est-à-dire dans la section  $\pi a^2$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \iint_{(C)} B \, dS = \frac{\mu_0 N I_1}{\pi D} \pi a^2 \\ &= \int_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{(C)} A \cdot dl = A \cdot 2\pi r \end{aligned}$$

Donc

$$A = \frac{\mu_0 N I_1}{\pi D} \frac{a^2}{2r}$$

▼  $r < a$  : On a

$$\frac{\mu_0 N I_1}{\pi D} \pi r^2 = A \cdot 2\pi r$$

Donc

$$A = \frac{\mu_0 N I_1}{\pi D} \frac{r}{2}$$

4°) D'après la loi de Faraday, on a :  $\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$

où  $\Phi_1 = L I_1$  ; soit  $\mathcal{E}_1 = -L \frac{dI_1}{dt}$

La loi d'Ohm permet d'écrire :  $R I_1 = \mathcal{E}_1 = -L \frac{dI_1}{dt}$

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{R}{L} I_1 = 0$$

La solution de cette équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre est :

$$I_1(t) = A e^{-Rt/L}$$

La constante A est imposée par la condition initiale :

à  $t = 0$ , on a :

$$I_1 = \frac{E_1}{R}$$

D'où

$$I_1(t) = \frac{E_1}{R} e^{-Rt/L}$$

avec  $L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{D}$

5°) Calculons le flux de  $\vec{B}$  sortant à travers le deuxième bobinage :

$$\Phi_2 = n \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = n B S$$

Soit

$$\Phi_2 = \mu_0 \frac{n N I_1}{D} a^2$$

La loi de Faraday donne :

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{\mu_0 n N a^2}{D} \frac{dI_1}{dt}$$

Soit d'après [1] :

$$\mathcal{E}_2 = -\mu_0 \frac{n N a^2}{D} \frac{E_1}{R} \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-Rt/L}$$

où encore :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{n}{N} E_1 e^{-Rt/L}$$

▼ Le courant induit  $i = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}$  s'ajoute au courant  $I_1$ , car  $\mathcal{E}_2 > 0$ , ce qui est en accord avec la loi de Lenz. Le courant  $i$  crée un champ  $\vec{B}_2$  qui s'ajoute au champ  $\vec{B}_1$  créé par  $I_1$ .



6°) Le champ électromoteur induit est donné par la relation :

$$\vec{E}_e = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est tangent au deuxième bobinage, donc  $\vec{E}_e$  l'est aussi.

Calculons  $A$  en  $r = a$  :

$$A = \frac{\mu_0 N I_1}{\pi D} \frac{a}{2}$$

Alors :

$$E_e = - \frac{\mu_0 N a}{2 \pi D} \frac{dI_1}{dt}$$

Or :

$$I_1 = \frac{E_1}{R} e^{-R/L} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = - \frac{E_1}{L} e^{-R/L}$$

Soit avec  $L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{D}$ , on a :

$$E_e = \frac{E_1}{2 \pi N a} e^{-R/L}$$

La f.e.m.  $E_2$  est donc :

$$E_2(t) = \int_{n \text{ spires}} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = n E_e 2 \pi a$$

Soit

$$E_2(t) = \frac{n}{N} E_1 e^{-R/L}$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
CASABLANCA

Année : 1986-87  
1<sup>ère</sup> session : 2<sup>ème</sup> partie  
Section : PC

ENONCE

1- Un fil rectiligne  $Z'Z$  de longueur infinie est parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Dans un plan contenant  $Z'Z$  on place un cadre rectangulaire  $ABCD$  indéformable parcouru par un courant  $I'$  dont le côté  $AB = l$  est situé à une distance  $d$  du fil. le côté  $BC$  a pour longueur  $a$ . Le cadre est formé de  $n$  spires rectangulaires.

1°) Quelle est l'expression de la force exercée par le courant  $I$  sur le cadre?

2°) Quelle est la valeur du flux magnétique envoyé par le fil à travers le cadre. En déduire le coefficient d'induction mutuelle du système fil-cadre?

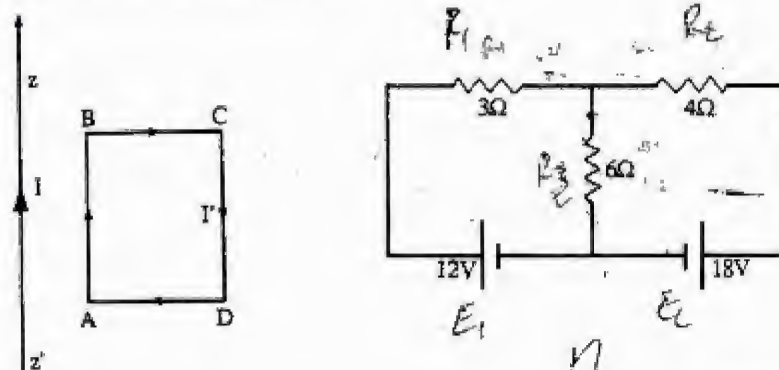
3°) Par application du théorème de Maxwell, retrouver l'expression précédente de la force?

II- Etant donné le circuit schématisé ci-contre, calculer le courant dans la résistance de  $6\Omega$  par application :

1°) Des lois de Kirchhoff.

2°) Du principe de superposition.

3°) Du théorème de Thévenin.



SOLUTION

1-1°) Les forces agissant sur  $BC$  et  $AD$  sont égales et opposées et leur résultante est nulle.

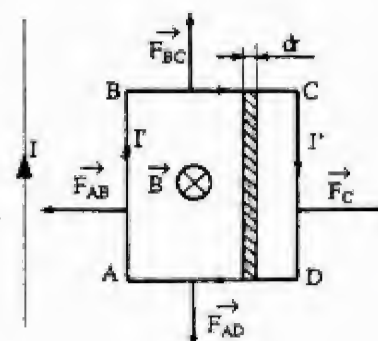
La force  $\vec{F}_{AB}$  est attractive (force entre deux courants parallèles) tandis que la force agissant sur  $CD$  est répulsive. Le côté  $AB$  est plus proche du

fil et donc la résultante  $\vec{F}$  est perpendiculaire au fil, dirigée vers le fil, et de module :

$$F = F_{AB} - F_{CD}$$

La loi de Laplace s'écrit :

$$d\vec{F}_{AB} = n I' d\vec{l} \wedge \vec{B} (d)$$



expression de la force agissant sur un élément de courant  $I' d\vec{l}$  du cadre. De même :

$$d\vec{F}_{CD} = N I' d\vec{l} \wedge \vec{B} (d+a)$$

Pour calculer le champ magnétique créé en AB et CD, on utilise le théorème d'Ampère.

Pour cela on évalue la circulation de  $\vec{B}$  sur un cercle de rayon  $r$  où  $\vec{B}$  reste constant en module :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

Nous avons donc :  $F_{AB} = N I' l \frac{\mu_0 I}{2 \pi d}$  et  $F_{CD} = N I' l \frac{\mu_0 I}{2 \pi (d+a)}$

D'où

$$F = \frac{\mu_0 I N I' l}{2 \pi} \frac{a}{d(d+a)}$$

2°) Le flux traversant le rectangle élémentaire pour une spire vaut :

$$d\phi_1 = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B l dr = \frac{\mu_0 I l}{2 \pi r} dr$$

Le flux traversant le cadre s'obtient en faisant varier  $r$  de  $d$  à  $d+a$  (figure de la page précédente)

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{2 \pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2 \pi} \log \frac{d+a}{d}$$

Le flux traversant les  $N$  spires s'obtient en multipliant  $\phi_1$  par  $N$  :

$$\Phi = N \phi_1 = \frac{\mu_0 N I l}{2 \pi} \log \frac{d+a}{d}$$

Soit avec  $\Phi = M I$ , on a :  $M = \frac{\mu_0 N l}{2 \pi} \log \frac{d+a}{d}$

3°) D'après le théorème de Maxwell, on a :

$$dW = I' d\Phi = -F d(d)$$

Le signe (-) signifie que  $d$  et  $F$  varient de manière opposée.

La force électromagnétique vaut alors en module :

$$F = -I' \frac{d\Phi}{d(d)} = -I' \frac{dM}{d(d)}$$

$$F = -\mu_0 \frac{N I I'}{2 \pi} l \left( \frac{1}{d+a} - \frac{1}{d} \right)$$

$$F = \mu_0 \frac{N I I' l}{2 \pi} \frac{a}{d(d+a)}$$

Soit :

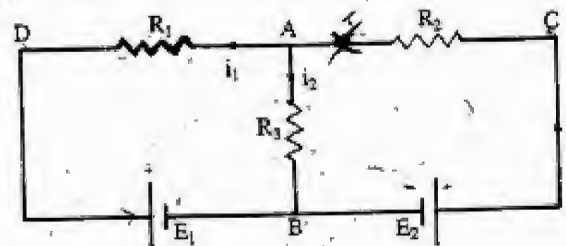
## II- 1°) Les lois du Kirchhoff

Considérons le circuit schématisé ci-contre :

$$R_1 = 3 \Omega ; R_2 = 4 \Omega$$

$$R_3 = 6 \Omega ; E_1 = 12 \text{ V}$$

$$E_2 = 18 \text{ V}$$



Soit  $I$  l'intensité dans la branche BC,  $i_1$  dans AD et  $i_2$  dans AB. La loi aux noeuds donne  $I = i_1 + i_2$ . La loi aux mailles fournit :

maille BCAB :  $R_2 I - E_2 + R_3 i_2 = 0$

maille BADB :  $-R_3 i_2 + R_1 i_1 + E_1 = 0$

On remplace  $I$  dans la première par  $i_1 + i_2$  et on obtient deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} R_2 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = E_2 \\ R_1 i_1 - R_3 i_2 = -E_1 \end{cases}$$

Numériquement, ce système devient :

$$\begin{cases} 4 i_1 + 10 i_2 = 18 \\ 3 i_1 - 6 i_2 = -12 \end{cases}$$

Déterminant  $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -54$  et  $\Delta_{i_2} = \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = -102$

Donc, l'intensité de courant  $i_2$  traversant la résistance de  $6 \Omega$  est :

$$i_2 = \frac{\Delta_{i_2}}{\Delta} = \frac{102}{-54} = -\frac{17}{9}$$



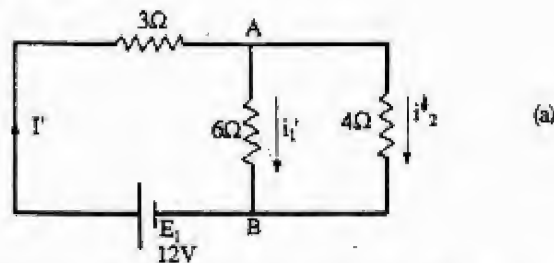
Soit

$$i_2 = 1,89 \text{ A}$$

## 2°) Principe de superposition

Le circuit comporte deux générateurs, le régime permanent qui s'établit peut être obtenu en superposant les régimes permanents lorsque chaque générateur fonctionne seul. Ainsi l'intensité dans chaque branche du réseau est la somme algébrique des courants qui circulent dans cette branche, lorsque chaque générateur fonctionne seul.

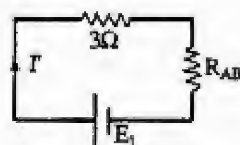
- le générateur  $E_1$  fonctionne seul :



Calculons la résistance équivalente entre A et B :  $R_{AB} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = \frac{12}{5} \Omega$

Soit d'après la loi de Pouillet :

$$I' = \frac{E_1}{R_{AB} + 3} = \frac{12}{\frac{12}{5} + 3} = \frac{60}{27} \text{ A}$$



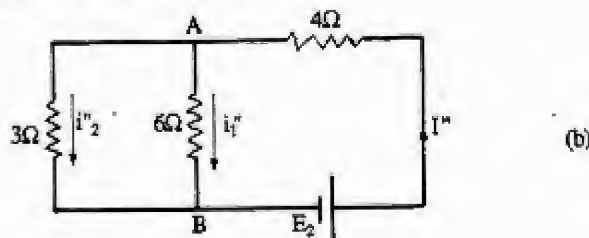
D'après le schéma (a), nous avons :

$$6 i_1' = 4 i_2' \quad \text{et} \quad i_1' + i_2' = I'$$

Il vient alors :

$$i_1' = \frac{4}{4 + 6} I' = \frac{4}{4 + 6} \cdot \frac{60}{27} = \frac{24}{27} \text{ A}$$

- le générateur  $E_2$  fonctionne seul :

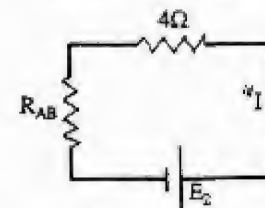


La résistance équivalente entre A et B est :

$$R_{AB} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

Soit d'après la loi de Pouillet :

$$I'' = \frac{E_2}{R_{AB} + 4} = \frac{18}{2 + 4} = 3 \text{ A}$$



Le schéma (b) montre que :

$$i_1'' + i_2'' = I'' \quad \text{et} \quad 6 i_1'' = 3 i_2''$$

On en déduit :

$$i_1'' = \frac{3}{3 + 6} I'' = \frac{3}{9} \cdot 3 = 1 \text{ A}$$

Le théorème de superposition donne donc :

$$i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{24}{27} + 1 = \frac{17}{9} \text{ A}$$

Soit

$$i_1 = 1,89 \text{ A}$$

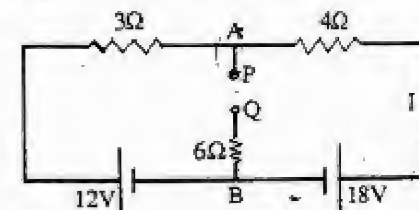
## 3°) - Théorème de Thevenin

▼ Effectuons une coupure artificielle PQ entre A et B; ce qui entraîne un courant nul dans la branche AB et l'intensité dans le reste du circuit est :

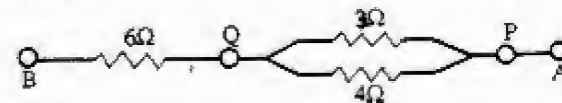
$$I = \frac{18 - 12}{3 + 4} = \frac{6}{7} \text{ A}$$

Donc la tension entre P et Q (ou entre A et B) est :

$$V_{AB} = 18 - 4 \cdot \frac{6}{7} = \frac{102}{7} \text{ V}$$



▼ On supprime toutes les f.e.m. des générateurs du circuit. Alors la résistance équivalente du circuit entre P et Q est :



$$R_{PQ} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4} = \frac{12}{7} \Omega$$

▼ L'intensité du courant qui circule dans AB est donc :

$$i = \frac{V_{AB}}{R_{PQ} + 6} = \frac{\frac{102}{7}}{\frac{12}{7} + 6} = \frac{17}{9} \text{ A}$$

soit :

$$i = 1,89 \text{ A}$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
CASABLANCA

Année : 1986-87  
1ère session : 2ème partie  
Section : MP

ENONCÉ

1- Un fil rectiligne indéfini est parcouru par un courant constant  $I$ .

1°) a) Comment sont les lignes du champ magnétique ?

b) Calculer, par application du théorème d'Ampère, le champ  $\vec{B}$  en tout point  $P$  défini par ses coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  dans la base "mobile"  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .

Existe-t-il en ce point un champ électrique  $\vec{E}$  ?

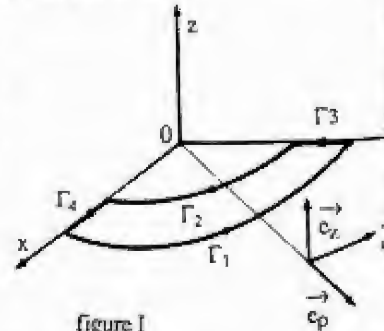


figure I

2°) a) Calculer la circulation de  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé orienté  $\Gamma$ , constitué de 2 quarts de cercle  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  d'axe  $\vec{Oz}$ , de rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , réunis par 2 segments  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ .

b) Quel est le flux de  $\vec{B}$  à travers  $\Gamma$  ?

3°) Le fil est maintenant parcouru par un courant  $I$ , dépendant du temps.

a) Donner, sans le calculer, la direction du potentiel vecteur  $\vec{A}$  au point  $P$ .  
En déduire celle du champ électrique d'induction  $\vec{E}_1$ .

b) Quelle serait la f.e.m induite  $e$ , qui prendrait naissance dans le circuit  $C$  matérialisé par le contour  $\Gamma$ . Un tel résultat est-il prévisible ?

11- 1°) Calculer, en fonction des diverses résistances  $R_i$  ( $i = 1$  à 4) et  $E$ , la ddp  $\Delta V$  entre les points  $B$  et  $D$  du pont continu de la fig.II,1. En déduire la condition pour que  $\Delta V$  soit nulle.

2°) Ce pont comprend maintenant des impédances  $Z_i$  ( $i = 1$  à 4) et est alimenté par un générateur de fréquence  $f$ , comme l'indique la fig.II,2 ( $R_1$  et  $R_2$ ) étant variables.

a) Déterminer dans quelles conditions le pont peut être équilibré (courant d'intensité nulle dans la diagonale contenant le détecteur  $(d)$ ).

b) Quel est l'intérêt éventuel d'un tel montage ?

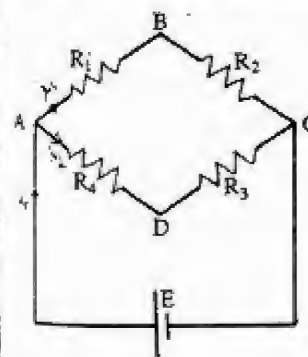


figure II,1

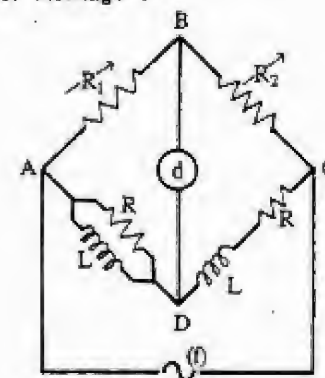
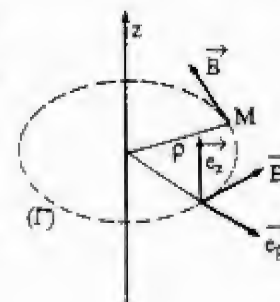


figure II,2

SOLUTION

1°) a) Le courant  $I$  est porté par l'axe  $Z'OZ$  du fil. Ce courant crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dont les lignes d'induction sont des cercles d'axe  $OZ$ .

Donc, en tout point  $M$  de l'espace ( $OM = \rho$ ), le champ magnétique a une direction tangente à la ligne de force circulaire  $(\Gamma)$  d'axe  $OZ$ , passant par  $M$ :  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan  $(\vec{e}_z, \vec{e}_\rho)$ , son intensité ne dépend que de  $\rho$ .





b) Calculons la circulation de  $\vec{B}$  le long de  $(\Gamma)$

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi\rho$$

d'après le théorème d'Ampère :

$$B \cdot 2\pi\rho = \mu_0 \sum I$$

où  $\sum I$  est l'intensité totale des courants enlacés par  $(\Gamma)$ .

Il vient alors :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

Le fil étant parcouru par un courant constant, donc il n'existe pas de champ électrique au point M.

2°) a) Calculons la circulation de  $\vec{B}$  le long du contour fermé  $(\Gamma)$  (figure ci-dessous).

$$C = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_4} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}_1, \vec{A}$  et  $\vec{l}$  ont même direction (celle de  $\vec{e}_1$ )

▼ La circulation le long de  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  est nulle car  $\vec{B}$  est en tout point perpendiculaire au déplacement  $d\vec{l}$ .

$$\int_{\Gamma_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1} \rho_1 d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4}$$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -B_2 dl = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_2 d\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4}$$

Il vient alors :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

b) Flux de  $\vec{B}$  à travers  $\Gamma$

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \text{ car } \vec{B} \text{ est en tout point perpendiculaire à } d\vec{S}$$

3°) ▼ D'après l'expression du potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$$

On a :  $\vec{A}$  et  $\vec{l}$  ont même direction, soit :

$$\vec{A} = A \vec{e}_1$$

▼ Le champ électrique d'induction  $\vec{E}_1$  est défini par :

$$\vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right) \vec{e}_1$$

b) La f.e.m. induite  $e_1$  qui prendrait naissance dans le circuit C matérialisé par le contour  $\Gamma$  est définie par :

$$e_1 = \int_{(\Gamma)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = 0$$

car  $\vec{E}_1$  et  $d\vec{l}$  sont perpendiculaires. Ce résultat est effectivement prévisible car le flux est conservatif bien que le champ  $\vec{B}$  varie avec le temps et donc pas de f.e.m. induite.

II- 1°) Soit  $i_1$  l'intensité dans la branche AB et  $i_2$  dans AD.

Appliquons les lois d'Ohm entre A et C :

$$(R_1 + R_2) i_1 = (R_3 + R_4) i_2 = E$$

Il vient alors :

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

et

$$i_2 = \frac{E}{R_3 + R_4}$$

Calculons  $\Delta V$  entre les points B et D :

$$\Delta V = V_B - V_D = R_4 i_2 - R_1 i_1$$

$$\Delta V = E \left( \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

où encore

$$\Delta V = E \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}$$

La ddp  $\Delta V$  est nulle si :  $R_2 R_4 = R_1 R_3$ .

2°) a) Lorsque le détecteur (d) ne détecte aucun courant la ddp entre les points B et D est toujours nulle. A chaque instant, l'intensité a la même valeur dans  $R_1$  et  $R_2$ , appelons  $i_1$  sa valeur complexe, de même appelons  $i_2$  l'intensité commune à  $Z_3$  et  $Z_4$ .

Si les impédances sont prises sous la forme complexe, nous avons :

$$V_A - V_B = R_1 i_1 = V_A - V_D = Z_4 i_2$$

$$V_B - V_C = R_2 i_1 = V_D - V_C = Z_3 i_2$$

Divisons membre à membre :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_4}{Z_3}$$

Soit

$$R_1 Z_3 = R_2 Z_4$$

[1]

Les expressions des impédances sont :

$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j L \omega} = \frac{R + j L \omega}{j R L \omega}$$

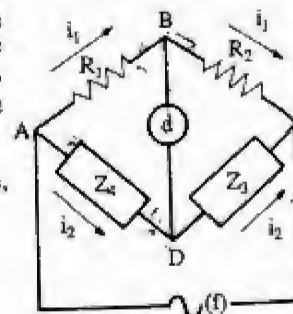
$$Z_3 = R + j L \omega$$

La relation [1] s'écrit alors :

$$R_1 (R + j L \omega) = \frac{R_2 (j R L \omega)}{(R + j L \omega)}$$

Soit :

$$R_1 (R^2 - L^2 \omega^2 + 2 j R L \omega) = j R_2 R L \omega$$



La partie réelle donne :

$$R = L \omega$$

[2]

et la partie imaginaire :

$$R_2 = 2 R_1$$

b) La fréquence  $f$  est liée à  $\omega$  par  $\omega = 2 \pi f$ , nous voyons que le pont peut servir à mesurer une fréquence en faisant varier ensemble les deux résistances  $R$  ou les deux inductances  $L$ . La fréquence sera déduite de la relation [2].

UNIVERSITE SIDI MOHAMED  
BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES  
FES

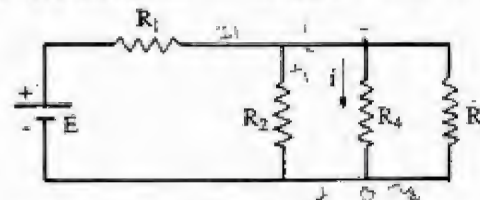
Année : 1985-86  
1ère session : 2ème partie  
Section : PCI

ENONCE

1°) - Une sphère conductrice de rayon  $R$  est portée au potentiel  $V$ . Quelle est sa capacité et son énergie électrostatique ?

2°) - On considère un condensateur sphérique dont l'armature interne est constituée par la sphère précédente. L'armature externe ayant pour rayon  $R'$ , quelle doit être la d.d.p  $V'$  entre les deux armatures pour que l'énergie électrostatique soit la même que précédemment ? Comparer  $V$  et  $V'$ . Conclusion.

II- On considère le circuit représenté par le schéma ci-contre où  $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$  sont des résistances et où  $E$  est la f.e.m d'un générateur.



1°) Calculer la f.e.m  $E_0$  et la résistance interne  $R_0$  du générateur de Thévenin branché aux bornes de  $R_4$ . En déduire le courant  $i$  dans  $R_4$ .

2°) A.N :  $R_4 = \frac{4}{3} \Omega$  ;  $R_3 = 2 R_2 = 4 R_1 = 4 \Omega$  et  $E = 11$  Volts.

Calculer  $E_0$ ,  $R_0$  et  $i$ .

III- Une sphère conductrice  $S_1$  de centre  $O_1$  de rayon  $R$  est portée au potentiel  $V_0$ . Après l'avoir isolée, on l'approche d'une sphère  $S_2$  (conductrice) de centre  $O_2$  de rayon  $xR$  mais reliée au sol, la distance entre les deux centres  $O_1 O_2 = d$ ,  $d \gg R$  et  $x \ll 1$ .



1°) Calculer la charge  $Q_0$  et le potentiel  $V_1$  de  $S_1$  ainsi que la charge  $Q_2$  de  $S_2$ .

2°) Calculer les coefficients  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  et  $C_{22}$ .

IV 1°) Deux condensateurs plans de capacité  $C_1$  et  $C_2$  sont disposés en série et le groupement est chargé par une d.d.p  $V$ . Calculer la charge de chaque condensateur et la d.d.p entre ses armatures.

2°) On supprime la d.d.p de charge  $V$ , on court-circuite le condensateur de capacité  $C_1$ . On supprime le court-circuit et on rétablit la d.d.p de charge  $V$ . Mêmes questions que pour 1°).

### SOLUTION

I- 1°) ▼ Capacité de la sphère :  $C = \frac{Q}{V}$

et

$$V = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

Donc :

$$C = 4 \pi \epsilon_0 R$$

▼ Energie électrostatique :

Cette sphère en étant un conducteur, son énergie électrostatique est donc :

$$W = \frac{1}{2} C V^2;$$

Soit :

$$W = 2 \pi \epsilon_0 R V^2$$

2°) La capacité d'un tel condensateur sphérique est :

$$C' = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R R'}{R' - R}$$

Pour une d.d.p  $V'$  entre les deux armatures, l'énergie électrostatique est :

$$W' = \frac{1}{2} C' V'^2 = 2 \pi \epsilon_0 \frac{R R'}{R' - R} V'^2$$

Pour que  $W' = W$ , il faut que :

$$\frac{1}{2} C' V'^2 = \frac{1}{2} C V^2$$

Soit :

$$V' = V \sqrt{\frac{C}{C'}}$$

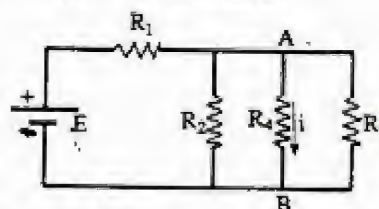
Soit en remplaçant par les expressions de  $C$  et  $C'$  :

$$V' = V \left( \frac{R' - R}{R'} \right)^{1/2}$$

Nous constatons que  $V' < V$

Conclusion : Le condensateur permet d'emmagasiner la même énergie électrostatique que le conducteur isolé en disposant d'une d.d.p moins grande.

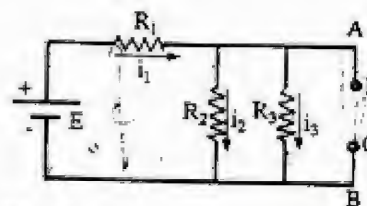
II - 1°) On considère le circuit représenté ci-dessous :



Calculons l'intensité circulant dans la branche AB en utilisant le théorème de Thévenin.

▼ Calcul de la f.e.m  $E_s$

Effectuons une coupure artificielle PQ entre A et B; ce qui entraîne un courant nul dans la branche AB



Nous avons les relations suivantes :

$$E - R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_3 i_3$$

et

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Ce qui nous permet de déduire :

$$i_2 = \frac{R_3 E}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$$

Donc la tension entre P et Q (ou entre A et B) est :

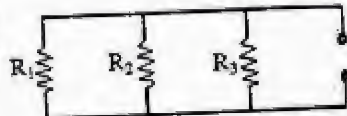
$$E_0 = V_{AB} = R_2 i_2$$

Soit

$$E_0 = E \frac{R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_2 R_1 + R_1 R_3}$$

▼ Calcul de  $R_0$  :

On supprime la f.e.m E et on intercale entre P et Q un générateur de f.e.m  $E_0$ . Alors la résistance équivalente du circuit entre P et Q est telle que :



$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Soit

$$R_0 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

▼ L'intensité du courant  $i$  qui circule dans  $R_4$  et donc :

$$i = \frac{E_0}{R_0 + R_4}$$

Soit :

$$i = E \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) R_4}$$

2°) A.N :  $R_4 = \frac{4}{3} \Omega$  ;  $R_3 = 4 \Omega$  ;  $R_2 = \frac{R_3}{2}$  ;  $R_1 = \frac{R_3}{4}$  ;  $E = 11 \text{ V}$

▼ 
$$E_0 = E \frac{\frac{R_3^2}{2}}{\frac{R_3^2}{2} + \frac{R_3^2}{4} + \frac{R_3^2}{8}} = \frac{4 E}{1 + 2 + 4} = \frac{4 E}{7}$$

Soit :

$$E_0 = \frac{44}{7} \text{ V}$$

▼ 
$$R_0 = \frac{\frac{R_3^2}{8}}{R_3^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right)} = \frac{R_3}{7}$$

Soit :

$$R_0 = \frac{4}{7} \Omega$$

▼

$$i = \frac{E_0}{R_0 + R_4} = \frac{\frac{44}{7}}{\frac{4}{7} + \frac{4}{3}}$$

Soit :

$$i = 3,3 \text{ A}$$

III - 1°) Détermination de  $Q_0$  et  $V_1$  de  $S_1$  et  $Q_2$  de  $S_2$  :



La sphère  $S_1$  étant isolée, elle conserve sa charge :

$$Q_0 = 4 \pi \epsilon_0 R V_0$$

mais son potentiel passe de  $V_0$  à  $V_1$ . la sphère  $S_2$  prendra par influence une charge  $Q_2$  (de signe opposé à  $Q_0$ ).

Pour déterminer  $V_1$  et  $Q_2$ , il faut alors deux équations que l'on obtient en écrivant que les potentiels en  $O_1$  ( $V_1$ ) et en  $O_2$  ( $V_2 = 0$ ) sont produits par deux répartitions sphériques et homogènes de charges portées respectivement par  $S_1$  et  $S_2$  (On tient compte du fait que la distance  $d$  des centres des deux sphères est grande devant le rayon  $xR$  et par suite les charges de la seconde sont au premier ordre près à la distance  $d$  du centre de la première). On a donc :

$$V_1 = \frac{Q_0}{4 \pi \epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 d} \quad [1]$$

$$0 = \frac{Q_0}{4 \pi \epsilon_0 (x R)} + \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 d} \quad [2]$$

L'équation [2] implique :  $Q_2 = -Q_0 \frac{x R}{d} \quad [3]$



soit

$$Q_2 = -4 \pi \epsilon_0 x V_0 \frac{R^2}{d}$$

Remplaçons  $Q_2$  par sa valeur dans l'équation [1]

$$V_1 = \frac{Q_0}{4 \pi \epsilon_0 R} \left( 1 + \frac{Q_2}{Q_0} \frac{R}{d} \right)$$

$$V_1 = \frac{Q_0}{4 \pi \epsilon_0 R} \left( 1 - \frac{x R^2}{d^2} \right)$$

soit

$$V_1 = V_0 \left( 1 - \frac{x R^2}{d^2} \right)$$

2°) Détermination des coefficients  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  et  $C_{22}$ 

Par définition des capacités, nous avons les relations suivantes :

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$

$$Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$

On se place dans le cas particulier faisant l'objet de la première question tout en conservant les mêmes notations, à savoir :

$$Q_1 = Q_0 ; \quad V_1 ; \quad V_2 = 0 ; \quad Q_2$$

Nous avons alors :

$$Q_0 = C_{11} V_1 \quad \text{et} \quad Q_2 = C_{21} V_1$$

Les relations [1] et [2] deviennent :

$$V_1 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{R_1} + \frac{Q_2}{d} \right) = \frac{V_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{C_{11}}{R_1} + \frac{C_{21}}{d} \right)$$

$$0 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_0}{d} \right) = \frac{V_1}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{C_{21}}{R_2} + \frac{C_{11}}{d} \right)$$

D'où les deux équations :

$$d C_{11} + R_1 C_{21} = 4 \pi \epsilon_0 R_1 d$$

$$R_2 C_{11} + d C_{21} = 0$$

Nous en tirons :  $C_{11} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 d^2}{d^2 - R_1 R_2}$  et  $C_{21} = -4 \pi \epsilon_0 \frac{R_1 R_2 d}{d^2 - R_1 R_2}$

Soit avec  $R_1 = R$  et  $R_2 = x R$ 

soit :  $C_{11} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R d^2}{d^2 - x R^2}$  et  $C_{21} = -4 \pi \epsilon_0 \frac{x R^2 d}{d^2 - x R^2}$

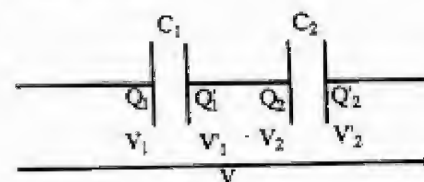
Par symétrie sur les indices, nous en déduisons :

$$C_{12} = C_{21} \quad \text{et} \quad C_{22} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{R_2 d^2}{d^2 - R_1 R_2}$$

soit :  $C_{12} = -4 \pi \epsilon_0 \frac{x R^2 d}{d^2 - x R^2}$  et  $C_{22} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{x R d^2}{d^2 - x R^2}$

Remarque : Si  $d$  tend vers l'infini,  $C_{12}$  et  $C_{21}$  tendent vers zéro.  $C_{11}$  et  $C_{22}$  tendent vers la capacité d'une sphère seule dans l'espace.

IV-1°)

Soient  $Q_1$ ,  $Q_1'$ ,  $Q_2$ ,  $Q_2'$ ,  $V_1$ ,  $V_1'$ ,  $V_2$  et  $V_2'$ , les charges et les potentiels des quatre armatures.

D'après la définition de la capacité d'un condensateur, on a :

$$Q_1 = C_1 (V_1 - V_1') \quad \text{et} \quad Q_2 = C_2 (V_2 - V_2') \quad [1]$$

En raison de l'influence totale de chaque condensateur, on a :

$$Q_1 = -Q_1' \quad \text{et} \quad Q_2 = -Q_2' \quad [2]$$

Les deux armatures correspondantes aux potentiels  $V_1'$  et  $V_2'$  sont reliées par un fil conducteur, donc elles sont au même potentiel. Soit :

$$V_1' = V_2' \quad [3]$$

Ces deux dernières armatures forment un conducteur dont la charge totale est nulle, d'où :

$$Q_2 = -Q'_1 \quad [4]$$

Les relations [2] et [4] permettent de conclure que :  $Q_1 = Q_2$  [5]

Les relations [1] permettent de déduire :

$$V'_1 = V_1 - \frac{Q_1}{C_1} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} + V'_2$$

En tenant compte de [3], il vient :

$$V_1 - \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} + V'_2$$

Donc :

$$V'_2 - V_1 = -\frac{Q_2}{C_2} - \frac{Q_1}{C_1}$$

Or :  $V'_2 - V_1 = V$  et  $Q_1 = Q_2$  d'après [5]

soit alors :

$$V = -Q_1 \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

On tire alors :

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V$$

Des relations [1], nous déduisons la d.d.p entre les armatures de chaque condensateur :

$$V'_1 - V_1 = -\frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V$$

$$V'_2 - V_2 = -\frac{Q_2}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V$$

**Remarque :** Ces résultats peuvent être obtenus très facilement en utilisant le résultat bien connu de deux condensateurs en série.

2°) En supprimant la d.d.p de charge  $V$ , les condensateurs restent chargés. On court-circuite le condensateur de capacité  $C_1$  : sa charge devient nulle. En supprimant encore une fois le court-circuit et en rétablissant la d.d.p de charge  $V$ , on charge une nouvelle fois  $C_1$  et par influence  $C_2$  : les résultats sont identiques à ceux de 1°).

UNIVERSITE SIDI MOHAMED  
BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES  
FES

Année : 1986-87  
1<sup>ère</sup> session : 2<sup>ème</sup> partie  
Section : PCI

ENONCE

### EXERCICE I

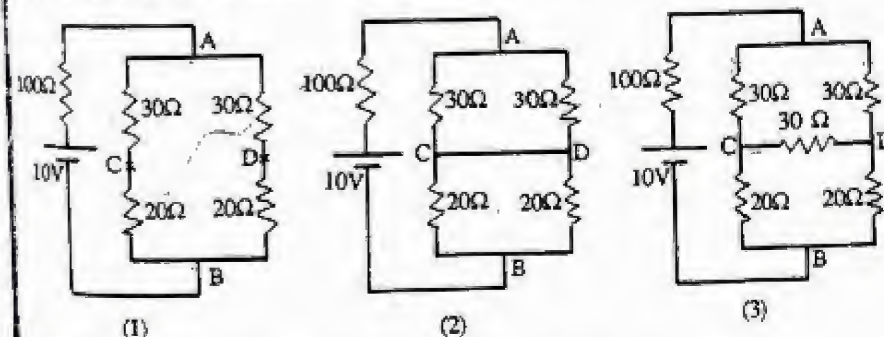
Deux sphères conductrices identiques de rayons  $R$  dont les centres sont à une distance  $d$  ( $d \gg R$ ) portent les charges  $Q_1$  et  $Q_2$ .

1°) Calculer les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  des deux conducteurs.

2°) On relie les sphères par un fil conducteur, calculer les nouvelles charges  $Q_1$  et  $Q_2$  ainsi que les potentiels  $V_1$  et  $V_2$ .

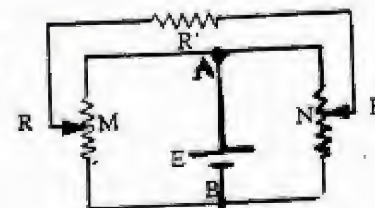
3°) Calculer la capacité propre du conducteur ainsi constitué.

**EXERCICE II :** On donne les circuits suivants :



Calculer dans chaque cas, la tension  $V_{AB} = V_A - V_B$ .

**EXERCICE III :** Dans le circuit schématisé ci-contre, les deux résistances entre A et B sont égales à  $R$ . Les points M et N sont tels que  $R_{AN} = R_{BM} = x$ . ( $0 \leq x \leq R$ )





a) Calculer en utilisant le théorème de Thévenin, le courant  $I$  circulant dans la résistance  $R'$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $R'$  et  $x$

b) Préciser le sens de  $I$  suivant la valeur de  $x$ .

## SOLUTION

## EXERCICE I

1°) Les charges de la sphère (I) sont réparties à sa surface, à la distance  $R$  de son centre. Les

charges créent en ce point le potentiel :  $\frac{Q_1^o}{4 \pi \epsilon_0 R}$

Les charges de la seconde sphère (II) sont à la distance  $d$  du centre de la sphère (I) en première approximation (la distance  $d$  des centres des deux sphères étant grande devant le rayon

$R$ ). La contribution des charges de la sphère (II) au potentiel  $V_1^o$  est :  $\frac{Q_2^o}{4 \pi \epsilon_0 d}$

On a donc :  $V_1^o = \frac{Q_1^o}{4 \pi \epsilon_0 R} + \frac{Q_2^o}{4 \pi \epsilon_0 d}$

Par un raisonnement analogue :

$$V_2^o = \frac{Q_1^o}{4 \pi \epsilon_0 d} + \frac{Q_2^o}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

2°) Les deux sphères sont maintenant reliées par un fil conducteur, il se produit alors un écoulement de charges d'une sphère à l'autre jusqu'à un nouvel état d'équilibre caractérisé par l'égalité des potentiels des sphères (I) et (II) :

$$V_1 = V_2$$

On a alors comme précédemment :

$$V_1 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 R} + \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 d}$$

et

$$V_2 = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 d} + \frac{Q_2}{4 \pi \epsilon_0 R}$$

Comme  $V_1 = V_2$  on tire :

$$Q_1 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{d} \right) + Q_2 \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) = 0 \quad [1]$$

La charge totale est conservée :

$$Q_1^o + Q_2^o = Q_1 + Q_2 \quad [2]$$

La résolution du système d'équations [1] et [2] à deux inconnues permet d'avoir  $Q_1$  et  $Q_2$  :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_1^o + Q_2^o}{2}$$

La valeur commune de  $V$  des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  est donc :

$$V = \frac{Q_1^o + Q_2^o}{8 \pi \epsilon_0 R} \left( 1 + \frac{R}{d} \right)$$

3°) Capacité propre du condensateur

La charge du condensateur ainsi constitué est :

$$Q = Q_1^o + Q_2^o$$

Sa capacité est définie par :

$$Q = C V$$

$$C = \frac{Q_1^o + Q_2^o}{V} = \frac{8 \pi \epsilon_0 R}{1 + \frac{R}{d}}$$

Si nous tenons compte de l'approximation du texte, c'est-à-dire  $R \ll d$ , l'expression de la capacité devient :

$$C = 8 \pi \epsilon_0 R \left( 1 - \frac{R}{d} \right)$$

UNIVERSITE SIDI MOHAMED  
BEN ABDELLAH  
FACULTE DES SCIENCES  
MEKNES

Année : 1986  
1ère session : 2ème part  
Section : M

ENONCÉ

1 - A l'aide du théorème de Thévenin déterminer le courant qui circule dans la branche AB du circuit ci-dessous où :

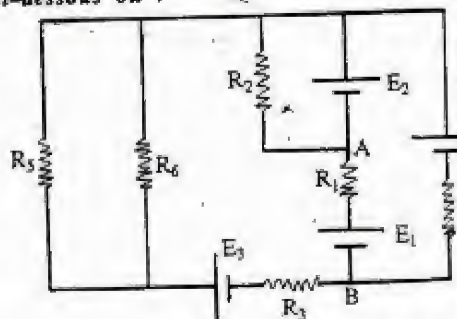
$$E_1 = 4 \text{ V} ; E_2 = 5 \text{ V} ;$$

$$E_3 = 12 \text{ V} ; E_4 = 8 \text{ V} ;$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 5 \Omega ;$$

$$R_4 = 1 \Omega ; R_5 = 2 \Omega ;$$

$$R_6 = 1,5 \Omega$$



II - Un cadre métallique de côté  $a$ , constitué d'un fil de sections  $S$  et de conductivité  $\sigma$ , est lancé sans vitesse initiale entre les pôles d'un électroaimant comme l'indique la figure (1). La partie inférieure

du cadre est dans une région où règne un champ d'induction magnétique horizontal uniforme.

La partie supérieure du cadre est hors de l'entrefer de l'aimant, où le champ d'induction est considéré comme négligeable pour ce problème. (L'entrefer c'est l'espace entre les deux pôles de l'aimant). On néglige également la self inductance du cadre pour l'ensemble du problème.

figure 1



figure 2

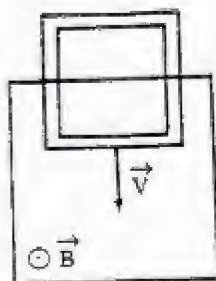


figure 3

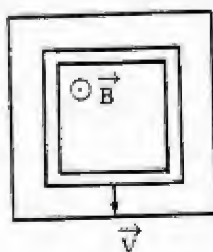


figure 4



1° Indiquer sur un schéma les forces qui agissent sur le cadre et le sens des courants induits pour chacune des positions des figures 2, 3 et 4.

2° Dans le cas de la figure 2.

a) Calculer la force électro-motrice induite dans le cadre.

b) Donner l'expression de la résistance du cadre.

c) Déterminer l'expression du courant induit.

d) Ecrire l'équation différentielle du mouvement du cadre. Montrer que pour un conducteur de conductivité  $\sigma$  et de masse volumique  $\rho$ , le mouvement est indépendant des dimensions du cadre, tant que le cadre ne dépasse pas latéralement de l'entrefer.

e) Calculer la vitesse limite d'un cadre en aluminium ( $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ;  $\sigma = 3,5 \cdot 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ ) si le champ d'induction magnétique dans l'entrefer est  $B = 1,5 \text{ Tesla}$ .

f) Calculer le temps au bout duquel le cadre aura atteint 63% de cette vitesse limite. ( $e^{-1} = 0,37$ ).

3° Décrire qualitativement le mouvement du cadre dans chacune des régions de l'aimant correspondant aux différentes positions des figures 2, 3 et 4.

Tracer l'allure générale de la courbe décrivant la variation du courant induit dans le cadre en fonction du temps.

SOLUTION

1° Appliquons le théorème de Thévenin.

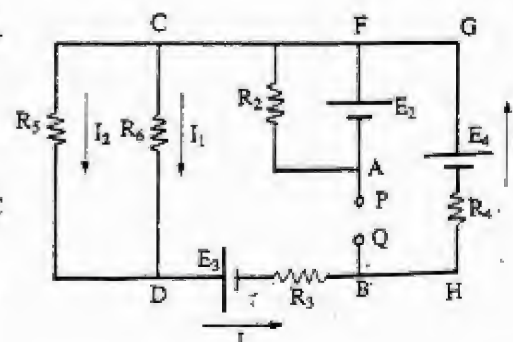
Effectuons une coupure en PQ entre A et B; ce qui nous donne un courant nul dans la branche AB.

Remplaçons  $R_5$  et  $R_6$  par une résistance équivalente  $R_{56}$ :

$$\frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

Appliquons les lois d'Ohms entre C et D:

$$R_{56} I = -R_3 I - E_3 - R_4 I + E_4$$





Soit

$$I(R_{56} + R_3 + R_4) = E_4 - E_3$$

d'où

$$I = \frac{E_4 - E_3}{R_{56} + R_3 + R_4}$$

Appliquons la loi au maille à B F G H :

$$U_0 + E_2 + E_1 - E_4 + R_4 I = 0$$

Soit

$$U_0 = E_4 - E_2 - E_1 - R_4 \frac{E_4 - E_3}{R_{56} + R_3 + R_4}$$

$$\text{A.N : } R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{15}{13} \Omega$$

$$U_0 = 8 - 5 - 4 - 2 \cdot \frac{\frac{15}{13} + 1 + 2}{\frac{15}{13} + 1 + 2}$$

Soit

$$U_0 = \frac{25}{27} \text{ V}$$

▼ Supprimons toutes les f.e.m des générateurs du circuit et calculons la résistance équivalente du circuit entre P et Q.

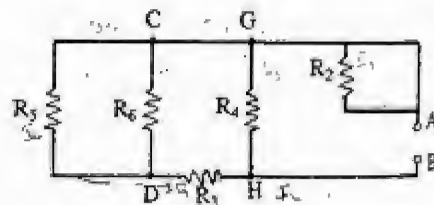
$R_{56}$  en série avec  $R_3$  et l'ensemble est en parallèle avec  $R_4$ . ( $R_2$  étant court-circuité)

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{56} + R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$\text{A.N : } R_0 = \frac{28}{27} \Omega$$

▼ L'intensité  $j$  du courant qui circule dans AB est telle que :

$$(R_1 + R_0) j = U_0$$



soit

$$j = \frac{U_0}{R_1 + R_0}$$

A.N :

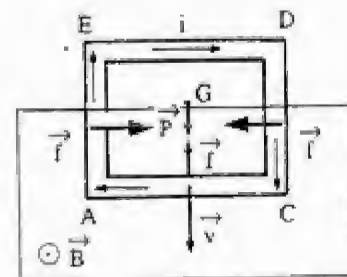
$$j = \frac{\frac{25}{27}}{\frac{28}{27} + 5} = \frac{25}{163}$$

Soit

$$I = 0,15 \text{ A}$$

11 - 1°) **Figure 2 :** Dans cette phase, les côtés verticaux sont soumis à deux forces électromagnétiques égales et opposées à chaque instant, donc de résultante nulle. Seul le côté horizontal inférieur AC qui est soumis à une force électromagnétique (figure ci-contre).

Au cours du déplacement du cadre, le flux coupé donne naissance à une f.e.m induite  $e(t)$ , donc à un courant induit d'intensité  $i(t)$ .

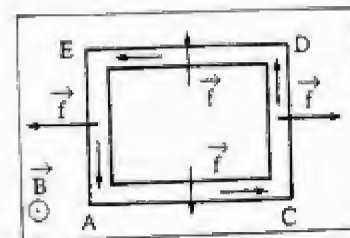


Le sens de ce courant est celui de CABDC, celui qui correspond à une induction du sens contraire de  $\vec{B}$  ou, ce qui revient au même, celui qui produit une force électromagnétique opposée au sens du mouvement (loi de Lenz).  
En conclusion, le cadre est alors soumis

- à son poids :  $\vec{P} = m \vec{g}$
- à la force électromagnétique  $\vec{F}$  dont le module sera calculé ultérieurement.

Figure 3 :

Dans cette deuxième phase, les deux portions des deux côtés AC et ED sont plongées dans l'induction  $\vec{B}$ . Les f.e.m induites dans ces deux portions sont égales mais de sens contraires, le courant induit est nul. On peut dire également que la f.e.m induite globale est nulle parce que le flux d'induction est constant : la force qui produit alors le mouvement est nulle.



**Figure 4 :** Dans cette dernière phase, seul le côté ED coupe des lignes de force. Le phénomène est le même que celui produit pendant la première phase mais le sens du courant induit est ACDEA.

▼ Une fois le cadre entièrement hors du champ d'induction, il n'est le siège d'aucun phénomène électrique et son mouvement est uniforme sous l'action d'une force nulle.

2°) Considérons le cas de la figure 2.

a) Au cours du déplacement du cadre, le flux coupé donne naissance à une f.e.m induite

$$e(t) = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{Or } d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \vec{B} \cdot \vec{n} ds \quad (\vec{B} // \vec{n})$$

$$d\phi = B a dz$$

$$\text{Donc } e(t) = - B a \frac{dz}{dt} = - B a v(t)$$

soit

$$e(t) = - B a v(t)$$

b) La résistance du cadre est donnée par :

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{s} = \frac{1}{\sigma} \frac{4a}{s}$$

soit

$$R = \frac{4a}{\sigma s}$$

c) L'intensité du courant induit est :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R}$$

soit

$$i(t) = \frac{B a}{R} v(t)$$

où encore

$$i(t) = \frac{B \sigma s}{4} v(t)$$

d) Equation différentielle du mouvement du cadre

▼ le cadre est soumis à :

– son poids :  $\vec{P} = m \vec{g}$

– la force électromagnétique  $\vec{f}$ , dirigée vers le haut et de module (d'après la loi de Laplace)

$$f = i a B = \frac{B^2 a^2}{R} v(t)$$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{y} = m \vec{g} + \vec{f}$$

Projetons cette relation sur l'axe  $zz'$  :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 a^2}{R} v(t)$$

L'équation différentielle qui régit le mouvement du cadre est donc :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 a^2}{R m} v = g \quad [1]$$

On pose  $\frac{B^2 a^2}{R m} = \frac{1}{\tau}$  où  $\tau$  a les dimensions du temps.

▼ Pour un conducteur de masse volumique  $\rho$  et de conductivité  $\sigma$ , on a :

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{m}{s l} \quad \text{donc } m = \rho s l$$

$$\text{et } R = \frac{l}{\sigma s} \quad \text{avec } l = 4a$$

$$\text{La valeur de } \frac{1}{\tau} \text{ est donc : } \frac{1}{\tau} = \frac{B^2 a^2}{R m} = \frac{B^2 \sigma}{16 \rho}$$

L'équation [1] devient :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \sigma}{16 \rho} v = g$$

Nous remarquons que la vitesse du cadre ne peut dépendre que de  $B$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $g$ , ainsi elle est donc indépendante des dimensions du cadre.

e) Quand la vitesse limite du cadre est atteinte,  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

L'équation (1) devient :



$$\frac{v_L}{\tau} = g \quad \Rightarrow \quad v_L = g \tau$$

soit

$$v_L = \frac{16 \rho g}{B^2 \sigma}$$

A.N :

$$v_L = 0,55 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$$

f) ▼ Résolvons l'équation différentielle [1] :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$$

d'où en faisant intervenir  $v_L$  :

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = g \tau$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_L - v}{\tau}$$

$$\frac{-dv}{v_L - v} = \frac{-dt}{\tau}$$

Intégrons :

$$\text{Log} \frac{v_L - v}{A} = -\frac{1}{\tau} t$$

donc :

$$v_L - v = A e^{-t/\tau}$$

Compte tenu des conditions initiales:  $t = 0, v = 0$ , on a  $A = v_L$ . D'où

$$v = v_L (1 - e^{-t/\tau})$$

▼ La vitesse  $v$  atteint 63% de la vitesse limite si :

$$\frac{63}{100} v_L = v_L (1 - e^{-t/\tau})$$

c'est-à-dire :  $e^{-t/\tau} = 1 - 0,63 = 0,37 \approx e^{-1}$ 

soit :

$$\frac{t}{\tau} = 1$$

où

$$t = \tau$$

A.N :  $v_L = g \tau$  donc  $\tau = \frac{v_L}{g} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ 

Il vient alors :

$$t = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Cette vitesse est donc pratiquement très vite atteinte.

3°) ▼ Avant de pénétrer dans la région où règne le champ magnétique  $\vec{B}$ , le cadre est en chute libre, son mouvement est donc rectiligne uniformément varié. Ensuite vient la phase de la figure 2, où la force électromagnétique agissant sur le côté AC s'oppose au poids. Dans ce cas, nous avons vu que le cadre atteint très vite une vitesse limite : le mouvement est donc rectiligne uniforme. Vient la phase de la figure 3, où la somme des forces électromagnétiques est nulle, le mouvement du cadre est de nouveau rectiligne uniformément

accélééré. Puis le cadre commence à sortir de la zone où règne  $\vec{B}$  (figure 4). Ici, la force agissant sur le côté ED est de nouveau opposée au poids : le mouvement est accéléré. Finalement, le cadre est entièrement en dehors de la zone du champ magnétique, il se retrouve alors en chute libre.

▼ Dans le cas de la figure 2, l'expression du courant induit est :

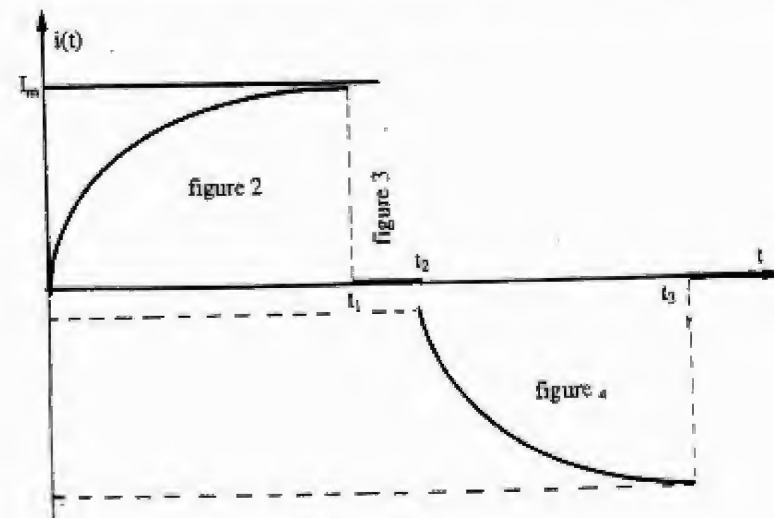
$$i(t) = \frac{B \sigma s}{4} v(t) = \frac{B \sigma s}{4} v_L (1 - e^{-t/\tau})$$

Soit en posant :  $I_m = \frac{B \sigma s v_L}{4}$ 

$$i(t) = I_m (1 - e^{-t/\tau})$$

▼ Après un temps  $t_1$ , le cadre est entièrement plongé dans le champ magnétique  $\vec{B}$  (fig. 3) :

le courant induit est nul jusqu'à ce que le cadre commence à quitter la région où règne  $\vec{B}$  (soit  $t_2$  cet instant). Depuis  $t_2$  (fig. 4), l'expression du courant induit est :  $i(t) = -I_m (1 - e^{-t/\tau})$ . A partir de l'instant  $t_3$ , le cadre est entièrement en dehors du champ, le courant induit devient nul.



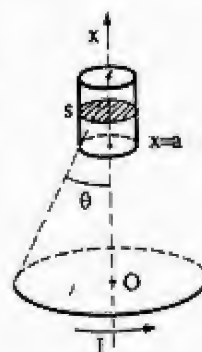


ENONCE

1°) Une spire circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$  est parcourue par un courant  $I$ . Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  qu'elle crée en un point  $M$  de son axe ( $OM = x$ ). Exprimer le résultat en fonction du demi angle  $\theta$  au sommet du cône formé par  $M$  et la spire.

2°) Un solénoïde de longueur  $l$  et de très petite section  $s$  est constitué par un enroulement de  $n$  spires jointives par unité de longueur. Il est placé de façon que son axe coïncide avec celui de la spire. Calculer le flux total de  $\vec{B}$  à travers le solénoïde. En déduire, après l'avoir défini, le coefficient d'induction mutuelle spire-bobine  $M$ .

3°) Le courant qui parcourt la spire est un courant alternatif :  $I = I_{\max} \cos \omega t$  qu'observe-t-on aux bornes du solénoïde ?

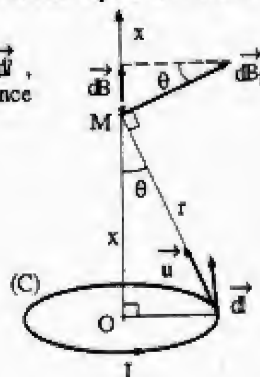


SOLUTION

1°) Détermination du champ magnétique sur l'axe d'une spire circulaire

D'après la formule de Biot et Savart, un élément de circuit  $d\vec{l}$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ , crée, en  $M$ , à la distance  $r$ , une induction  $d\vec{B}_1$  :

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$



avec  $d\vec{l} \perp \vec{u}$  quelque soit  $d\vec{l}$

Donc : 
$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

Compte tenu de la symétrie de révolution autour de l'axe de la spire, le champ magnétique  $\vec{B}$  est porté par  $Ox$  :

Intégrons la projection de  $d\vec{B}_1$  sur  $Ox$  :

$$dB = dB_1 \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \theta$$

Soit : 
$$B = \int_{(C)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin \theta$$

Pour tous les  $d\vec{l}$ ,  $r$  et  $B$  sont constants, donc l'intégration est seulement sur  $dl$  :

$$\int_{(C)} dl = 2\pi R$$

Soit avec :  $\sin \theta = \frac{R}{r}$ , l'expression de  $B$  devient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$

2°) Calcul du flux  $\phi$  de  $\vec{B}$  à travers le solénoïde

Calculons tout d'abord le flux de  $\vec{B}$  à travers une seule spire du solénoïde se trouvant à la distance  $x$  de  $O$  :

$$\phi_1 = \iint_{(s)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B s$$

car  $\vec{B} \parallel \vec{n}$  et on admet que le champ créé par la spire est en tout point de la section  $(s)$  est égal à sa valeur sur l'axe ( $s$  est supposé très petite).

Il vient alors :

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 I s}{2R} \sin^3 \theta$$



Le champ  $\vec{B}$  par contre n'est pas constant le long de Ox.

Prenons alors une tranche  $dx$  du solénoïde, contenant  $n dx$  spires et calculons le flux de  $\vec{B}$  à travers ces  $n dx$  spires :

$$d\phi = \phi_1 n dx = \frac{\mu_0 I n}{2 R} \sin^3 \theta dx$$

Or  $\operatorname{tg} \theta = \frac{R}{x}$  donc  $dx = \frac{-R}{\sin^2 \theta} d\theta$

D'où  $d\phi = \frac{-\mu_0 I n}{2} \sin \theta d\theta$

Soit en intégrant :

$$\phi = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin \theta d\theta$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

ou encore  $\phi = \frac{\mu_0 I n}{2} \left( \frac{a+l}{\sqrt{R^2 + (a+l)^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)$

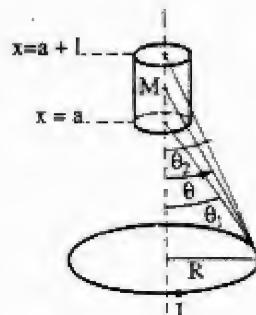
▼ Calcul du coefficient d'induction mutuelle spire-bobine M

$\phi = M I$  d'où :

$$M = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

3°) Le courant qui parcourt la spire est alternatif :  $I = I_{\max} \cos \omega t$ .

Donc Le flux total de  $\vec{B}$  à travers le solénoïde est une fonction du temps, donc il y a apparition d'une f.e.m d'induction  $e$  aux bornes du solénoïde :  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ . Il y a de plus apparition d'un courant induit  $i$  :  $i = \frac{e}{R}$  où  $R$  est la résistance du fil constituant le solénoïde.



UNIVERSITE CADI AYYAD  
FACULTE DES SCIENCES  
AGADIR

Année : 1984-85  
2<sup>ème</sup> session  
Section : PCI

# ENONCE

1 - 1°) Une distribution de charges positives de densité linéique  $\lambda$  est uniformément répartie sur un segment de droite AB. Calculer le champ  $\vec{E}_1$  créé par cette distribution en un point M de la médiatrice de AB situé à la distance  $a$  de AB. (figure 1).  
On donnera le module de  $E_1$  en fonction de  $\lambda$ ,  $a$  et  $\alpha$ .

2°) Que devient cette expression si on augmente indéfiniment AB ?

3°) Retrouver le résultat de la 2° question en appliquant directement le théorème de Gauss.

4°) Dédurre des résultats précédents le champs  $\vec{E}_2$ , en fonction de  $\lambda$ ,  $a$  et  $\alpha$ , créé en N par deux fils semi-infinis d'extrémités respectives A et B (figure 2).

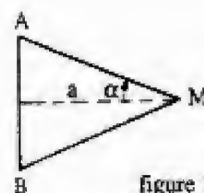


figure 1

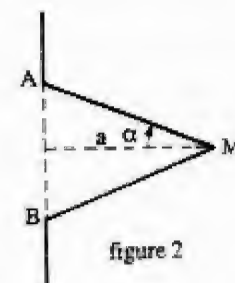
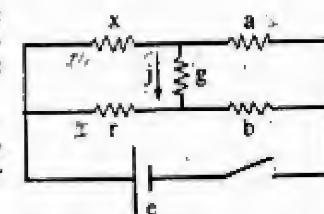


figure 2

II - On considère le réseau constitué par un générateur de force électromotrice  $e$  et de résistance interne négligeable et des résistances  $x$ ,  $r$ ,  $a$ ,  $b$  et  $g$ .



1°) Calculer le courant  $j$  qui circule dans  $g$  en fonction des éléments du réseau. Utiliser les lois de Kirchhoff.

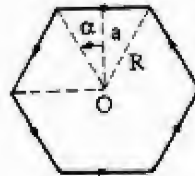
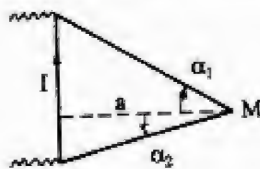
2°) Quelle est la relation qui lie  $a$ ,  $b$ ,  $r$  et  $x$  pour que  $j$  soit nul.

Calculer dans ces conditions  $x$ . On donne:  $a = 10\Omega$ ,  $b = 100\Omega$  et  $r = 200$

III - 1°) Calculer le champ magnétique créé par un fil de longueur finie parcouru par un courant constant  $I$  en un point  $M$  situé à la distance  $a$  du fil en fonction de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$  (figure).

2°) On construit un circuit polygonal à partir de  $n$  fils identiques au précédent et parcourus par la même intensité  $I$ . (figure). Calculer le champ créé au centre  $O$  du polygone par tous les côtés en fonction de  $n$ ,  $a$  et  $\alpha$ .

3°) Que devient l'expression de  $B_0$  si  $n$  tend vers l'infini, la distance  $R$  étant constante.



SOLUTION

I - 1°) On considère en P un petit élément  $dy$  du segment AB ( $OP = y$ ) portant une charge  $dq = \lambda dy$ . Le champ électrostatique qu'il crée au point M de la médiatrice AB est :

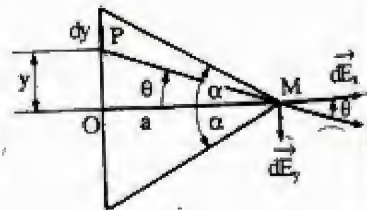
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2}$$

Si nous considérons un élément  $dy$  situé en P symétrique de P par rapport à O. Le champ élémentaire  $d\vec{E}$  produit par cet élément donne une composante suivant y égale et opposée à  $d\vec{E}_y$  créé par l'élément  $dy$  en P. Donc par raison de symétrie, la composante du champ  $\vec{E}$  suivant y est nulle.

La composante du champ  $d\vec{E}$  suivant x est :

$$dE_x = dE \cos \theta$$

Le champ total créé par le fil est la somme des champs élémentaires  $d\vec{E}_x$  créée par les charges  $dq$  :



$$E_1 = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos \theta}{r^2} dy$$

Exprimons  $dy$  et  $r$  en fonction de  $\theta$  et  $a$  :

$$y = a \tan \theta$$

En différentiant, on obtient :

$$dy = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

D'autre part :

$$r = \frac{a}{\cos \theta}$$

On obtient :

$$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \cos \theta \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$E_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta$$

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \sin \alpha \quad [1]$$

Soit

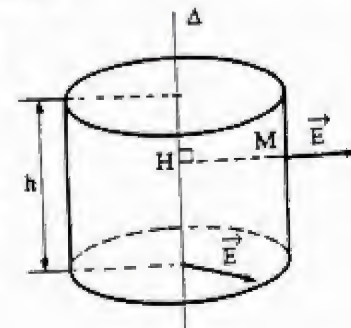
2°) Si on augmente indéfiniment AB,  $\alpha$  va tendre vers  $\frac{\pi}{2}$  et donc le champ créé par une droite indéfinie est :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

3°) On constate tout d'abord par raison de symétrie que le champ en un point M quelconque est normal à  $\Delta$  et que son module n'est fonction que de  $HM = a$ .

Construisons une surface de Gauss ayant la symétrie du problème, c'est-à-dire un cylindre de hauteur  $h$  passant par le point M et dont l'axe est le fil (figure ci-contre).

Calculons le flux sortant  $\phi$  du champ électrique à travers ce cylindre en remarquant qu'il se réduit au flux à travers sa surface latérale car le flux sortant des bases est nul (puisque le champ  $\vec{E}$  est dans le plan de base du cylindre).





On a donc :

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi a h$$

Les charges intérieures sont celles portées par le segment AB de longueur h, soit alors :  
 $Q = \lambda h$

D'après le théorème de Gauss :  $\phi = \frac{\sum Q_{\text{intérieures}}}{\epsilon_0}$

D'où 
$$2\pi a h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 a} \quad [2]$$

On retrouve bien le même résultat.

4°) Le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par un fil indéfini est la superposition des champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  créés respectivement par un segment AB et deux fils semi-indéfinis d'extrémités A et B :  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

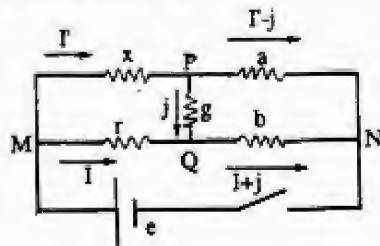
Il en résulte :

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1$$

Des relations [1] et [2], nous déduisons la valeur de  $E_2$  :

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 a} (1 - \sin \alpha)$$

II- 1°) On considère le réseau ci-dessous :



Soit I l'intensité dans la branche MQ et I' dans MP, la loi aux noeuds donne les autres intensités (figure ci-dessus).

La loi aux mailles fournit :

maille M P Q M :  $x I' + g j - r I = 0$

maille e M P N e :  $e = x I' + a (I' - j)$

maille e M Q N e :  $e = r I + b (I + j)$

On tire I et I' des deux dernières relations et on les porte dans la première; il vient :

$$I = \frac{e - b j}{r + b} \quad \text{et} \quad I' = \frac{e + a j}{a + x}$$

D'où

$$j = e \frac{r a - x b}{(b + r)(x a + a(a + x)) + (x + a) b r}$$

2°) Le courant j circulant dans g est nul si et seulement si :  $r a = x b$

Donc :

$$x = \frac{r a}{b}$$

AN :

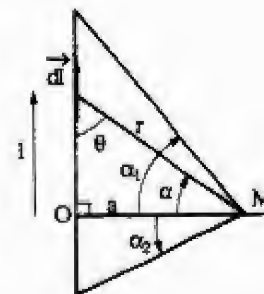
$$x = \frac{200 \cdot 10}{100} \Rightarrow x = 20 \, \Omega$$

III- 1°) D'après la loi de Biot et Savart, l'élément de courant  $dl$  produit en M une induction magnétique :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \theta$$

Le champ magnétique total  $\vec{B}$  créé par le fil est la somme des champs élémentaires  $d\vec{B}$  créé par les éléments de courants  $d\vec{l}$  :

$$B = \int dB$$



Or  $l = a \operatorname{tg} \alpha$  et  $dl = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \cos \alpha$$

On obtient :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \int \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha \cos \alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha$$

Soit

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \quad (\text{avec } \alpha_2 < 0 \text{ et } \alpha_1 > 0)$$

2°) Chaque côté du polygone est vu de O sous l'angle  $\frac{2\pi}{n}$ .

Les champs magnétiques dus à chaque côté du polygone s'ajoutent. Il revient à calculer le champ magnétique créé par l'un de ses côtés en O.

Le calcul est identique à celui de 1°, il suffit simplement de changer les bornes ( $\alpha_1 = \frac{\pi}{n}$  et  $\alpha_2 = -\frac{\pi}{n}$ ). On obtient alors pour cet élément :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} 2 \sin \frac{\pi}{n} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \sin \frac{\pi}{n}$$

On obtient alors pour le polygone :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} n \sin \frac{\pi}{n}$$

où en fonction de  $\alpha$  :

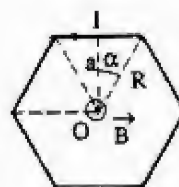
$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} n \sin \alpha.$$

3°) Exprimons  $a$  en fonction de  $R$  :

$$\cos \frac{\pi}{n} = \frac{a}{R} \quad \text{donc} \quad a = R \cos \frac{\pi}{n}$$

D'où :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$



$$2\pi = 2n\alpha \\ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{n}$$

Si  $n \rightarrow \infty$  :  $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$  et  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n}$

D'où  $B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi R} n \frac{\pi}{n} = \frac{\mu_0 I}{2 R}$  soit

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

Remarque : Ce résultat est prévisible, en effet lorsque  $n$  devient infini, la limite du polygone est un cercle de centre O et de rayon R, ainsi le champ B en O est celui d'une spire circulaire dont le résultat est bien connu  $\frac{\mu_0 I}{2 R}$ .

UNIVERSITE CADI AYYAD  
FACULTE DES SCIENCES  
AGADIR

Année : 1985-86  
2<sup>ème</sup> session  
Section : PCI

ENONCE

Un fil rectiligne infini  $xx'$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

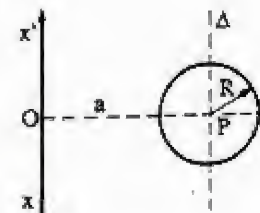
1°) Calculer le champ d'induction magnétique créé par ce courant en un point O situé à une distance  $a$  du fil en utilisant :

a) la loi de Biot et Savart.

b) le théorème d'Ampère.

2°) Une spire plane circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité constante  $i$  est assujettie à se déplacer dans un plan contenant  $xx'$ . On transporte la spire de l'infini à une position définie par la distance  $OP = a$  de son centre du fil ( $a \gg R$ ), comme  $a \gg R$  on peut admettre en tout point de la surface délimitée par la spire, que B a une valeur uniforme qui est celle en son centre P.

Evaluer la variation du flux d'induction  $\Delta \phi$  à travers la spire dans le déplacement considéré.





3°) Démontrer, à partir du travail des forces agissant sur un circuit, pour un déplacement élémentaire, dans un champ d'induction  $B$  que  $dW = I d\phi$ . En déduire le théorème de Maxwell.

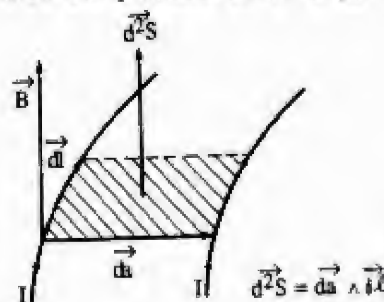
4°) Trouver la force qui s'exerce sur la spire.

5°) La spire étant dans la position de la figure de la seconde question, on la fait tourner d'un certain angle autour d'un axe parallèle au fil et passant par P. Evaluer :

a) La variation du flux.

b) Le travail reçu par l'opérateur pendant cette rotation.

c) Le couple qui s'exerce sur la spire dans sa nouvelle position.



SOLUTION

1°) Détermination du champ magnétique.

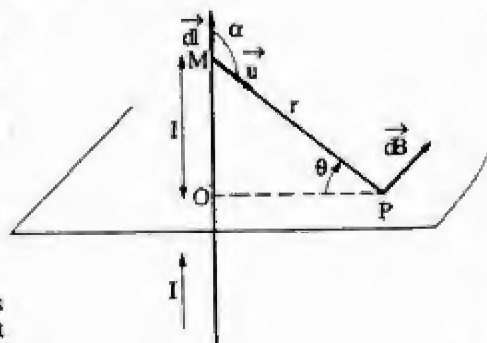
a) En utilisant la loi de Biot et Savart :

L'application de la formule de Biot et Savart donne le module de chaque  $dB$  produit par un élément de courant  $dl$  :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \alpha}{r^2}$$

Tous les vecteurs  $dB$  créés par les éléments de courant  $dl$  sont perpendiculaires au plan défini par le fil et le point P et dirigés dans le même sens.

L'addition vectorielle des éléments  $dB$  se ramène à une addition algébrique et donc  $B = \int dB$



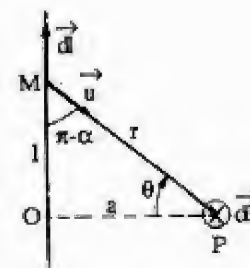
$$\text{Or } l = a \tan \theta \quad \text{donc} \quad dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$r = \frac{a}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \cos \theta$$

Il vient alors

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



b) En appliquant le théorème d'Ampère :

Les lignes de champ étant des cercles concentriques centrés sur le fil, on évalue alors la circulation de  $\vec{B}$  le long du cercle (C) de rayon a.

$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{(C)} B dl = B \int_{(C)} dl = 2\pi a B$$

car B est constant le long du cercle.

Or d'après le théorème d'Ampère,

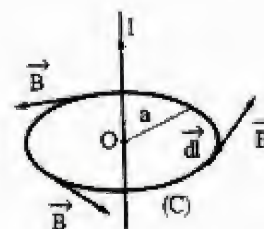
$$\int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Soit

$$B \cdot 2\pi a = \mu_0 I$$

donc

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



2°) L'induction créée par le courant rectiligne est normale au plan de la spire circulaire. Comme  $R \ll a$ , nous pouvons admettre, qu'en tout point de la surface délimitée par la spire, que B a une valeur uniforme qui est celle en son centre P calculée en 1°) :  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

Nous avons dans ces conditions :

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} ds = \iint B ds \quad (\vec{B} \text{ étant parallèle à } \vec{n})$$

Donc :

$$\phi = B \cdot s = B \pi R^2$$

Soit

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{a}$$

La variation de flux lorsqu'on transporte la spire de l'infini à la position définie par la distance  $a$  entre le centre de la spire et le fil :

$$\Delta\phi = \phi_a - \phi_\infty$$

$$= 0 \text{ car à l'infini } B = 0$$

Donc

$$\Delta\phi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{a}$$

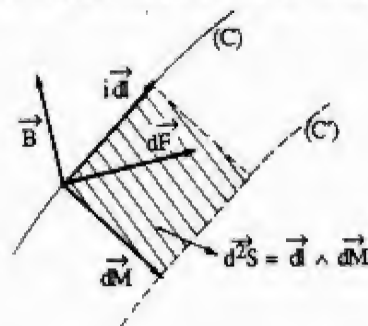
3°) Soit un circuit (C) parcouru par un courant continu  $I$ , placé dans une induction magnétique  $\vec{B}$  créée par un courant électrique étranger (i). Il est soumis à la force de Laplace:  $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Son déplacement quelconque  $d\vec{M}$  à courant constant  $I$  entraîne un travail de la force électromagnétique :

$$dW = d\vec{F} \cdot d\vec{M}$$

$$dW = I (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{M}$$

$$dW = I (d\vec{l} \wedge d\vec{M}) \cdot \vec{B}$$



où  $d\vec{l} \wedge d\vec{M}$  représente l'aire  $d^2S$  du parallélogramme construit sur  $d\vec{l}$  et  $d\vec{M}$ .

Donc :

$$dW = I d^2S \cdot \vec{B}$$

Soit :

$$dW = I d\phi$$

Ce résultat conduit à l'énoncé du théorème de Maxwell :

"Le travail des forces électromagnétiques appliquées à un circuit indéformable, parcouru par un courant constant et se déplaçant dans une induction invariable est égal au produit de l'intensité du courant par le flux d'induction coupé par le circuit dans son déplacement".

Soit  $\vec{R}$  la résultante générale qui tend à entraîner le circuit dans une direction  $d\vec{M}$ . L'élément de travail de cette force est :

$$dW = \vec{R} \cdot d\vec{M} = I d\phi$$

D'où

$$R_x = I \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$R_y = I \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$R_z = I \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

où  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$  sont les composantes de  $\vec{R}$  en coordonnées cartésiennes.

4°) Force qui s'exerce sur la spire

Dans le déplacement de la spire, le travail des forces électromagnétiques est :

$$W = i (\phi - \phi') = i\phi$$

$\downarrow$   
 $= 0$  car à l'infini  $B=0$

$$W = i \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{a}$$

Le déplacement de la spire étant une translation, le système des forces électromagnétiques équivaut à une force unique  $\vec{R} = R_x \vec{i}$  qui a pour support PO (par raison de symétrie) et son module vaut :

$$R = \left| \frac{dW}{da} \right| = \frac{\mu_0 i I}{2} \frac{R^2}{a^2}$$

Cette force est attractive si  $\phi$  est positif et répulsive dans le cas contraire.

5°) On fait tourner le spire d'un angle  $\theta$  autour d'un axe  $\Delta$  parallèle au fil et passant par P.



## a) La variation du flux

Le flux élémentaire  $d\phi$  de B est :

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{ds} = B \cos \theta ds = \frac{\mu_0 I}{2 \pi a} \cos \theta ds$$

donc :

$$\phi(\theta) = \frac{\mu_0 I}{2 a} (\cos \theta) R^2$$

La variation du flux correspondant à la rotation  $\theta$  est donc :

$$\Delta\phi = \phi(\theta) - \phi(\theta = 0)$$

calculé en 2°

$$\Delta\phi = \frac{\mu_0 I}{2 a} R^2 (\cos \theta - 1)$$

## b) Le travail reçu par l'opérateur pendant cette rotation

$$W = i \Delta\phi$$

Soit

$$W = \frac{\mu_0 i I R^2}{2 a} (\cos \theta - 1)$$

## c) Couple qui s'exerce sur la spire dans sa nouvelle position

Soit  $\Gamma$  le moment du couple électromagnétique,

$$dW = \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\theta} = -\Gamma d\theta$$

Donc :

$$\Gamma = \left| \frac{dW}{d\theta} \right|$$

Soit

$$\Gamma = \frac{\mu_0 i I}{2 a} R^2 \sin \theta$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
CASABLANCA

Année : 1986-87  
2ème session  
Section : PCI

## ENONCE

1 - Soit un fil métallique très long de forme cylindrique et de rayon  $r_1$  entouré par un cylindre métallique également très long de rayon  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ). Le fil et le cylindre sont coaxiaux et de longueur  $l$  ( $l \gg r_1$  et  $r_2$ ). Le cylindre extérieur (cathode) est mis à la masse ( $V = 0$ ) tandis que le fil intérieur (Anode) est porté à une haute tension positive  $V$ . Entre la cathode et l'anode circule un gaz de permittivité relative  $\epsilon$ , et de conductivité  $\sigma$ . (figure 1)

1°) En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ  $E$  à une distance  $r$  de l'axe ( $r_1 < r < r_2$ ) pour une charge  $Q$  portée par le fil.

2°) En déduire la capacité  $C$  du système Cathode-Anode.

3°) Quelle est alors l'expression du champ électrique au voisinage du fil ( $r = r_1$ ).

4°) On suppose que la conductivité  $\sigma$  du gaz n'est pas nulle et qu'un courant (dit "courant de fuite") circule entre anode et cathode. En utilisant la forme locale de la loi d'Ohm, calculer le champ  $\vec{E}$  à une distance  $r$  de l'axe ( $r_1 < r < r_2$ ) pour un courant de fuite  $I$ . En déduire la résistance de la couche gazeuse au moyen de la loi d'Ohm.

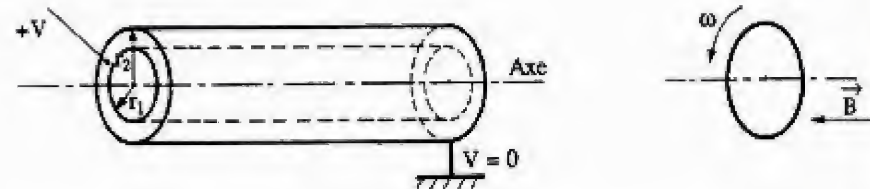
II- On considère un disque de cuivre de résistance électrique négligeable et de rayon  $a$ . Ce disque tourne autour de l'axe à la vitesse angulaire constante  $\omega$  et il est soumis à un champ d'induction  $\vec{B}$  uniforme parallèle à l'axe et orienté comme l'indique la figure 2.

1°) a) Calculer la force exercée sur un électron, entraîné par le mouvement de la matière. Cette force est équivalente à celle qui serait créée par un champ électrique  $\vec{E}$  dont on précisera la direction, le sens et la valeur à une distance  $r$  de l'axe.

b) En déduire la f.e.m (ou d.d.p) apparaissant entre l'axe et un point de la périphérie ( $r = a$ ) du disque.

2°) a) Calculer le flux coupé par un rayon du disque.

b) En déduire la f.e.m d'induction entre les extrémités de ce rayon ( $r = 0$  et  $r = a$ ).



SOLUTION

1 - 1°) Par raison de symétrie le champ est radial, son module ne dépend que de la distance à l'axe du cylindre. Prenons pour surface de Gauss une surface cylindrique de rayon  $r$ , d'axe  $x'x$ , de hauteur  $l$ .

Le flux sortant par cette surface est :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \cdot 2\pi r l$$

La charge contenue dans la surface de Gauss vaut  $Q$  (portée par le fil).

Le théorème de Gauss implique :

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Soit

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r l} \quad (1)$$

2°) La relation entre champ et potentiel s'écrit ici :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E dr + Cte$$

$$V = -\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l} \log r + Cte$$

La différence de potentiel entre cathode ( $V = 0$ ) et anode ( $V$ ) est :

$$V - 0 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l} \log \frac{r_2}{r_1}$$

La capacité du système cathode-anode est :  $C = \frac{Q}{V}$

soit :

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

3°) Au voisinage du fil ( $r = r_1$ ), l'expression du champ électrique est d'après [1] :

$$E(r_1) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l r_1}$$

Soit en remplaçant par  $Q = CV$

$$E(r_1) = \frac{V}{\log \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r_1}$$

4°) Les lignes de courants étant des segments de droites radiales.

La relation d'Ohm - Kirchhoff s'écrit :

$$\vec{i} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E}$$

où  $\vec{i}$  est le vecteur densité de courant.

L'intensité  $I$  est le flux du vecteurs densité de courant  $\vec{i}$  à travers le cylindre.  $\vec{i}$  étant normal à ce cylindre et a même module en chacun de ses points, donc :

$$I = 2\pi r l i$$

Il vient alors :

$$\vec{E} = \frac{\vec{i}}{\sigma}$$

Soit

$$E = \frac{I}{2\pi r l \sigma}$$

La d.d.p entre les armatures est égale à la circulation du champ électrique (au signe près), donc :



$$V = \int E dr = \frac{1}{2\pi l \sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$V = \frac{1}{2\pi l \sigma} \text{Log} \frac{r_2}{r_1}$$

Or  $V = RI$ , d'où la résistance de la couche gazeuse est :

$$R = \frac{1}{2\pi l \sigma} \text{Log} \frac{r_2}{r_1}$$

II- 1°) a) L'électron en mouvement est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \vec{E}$$

$\vec{v}$  est toujours perpendiculaire à  $\vec{B}$ , de plus  $v = \omega r$ . Donc :

$$F = q v B = q \omega r B \quad \text{avec } q = e$$

$$F = e \omega r B$$

▼  $\vec{F} = -e \vec{E}$ , il vient alors :

$$\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

ou en module :

$$E = \omega r B$$

$\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  forment un trièdre direct :  $\vec{E}$  est radial et dirigé vers l'extérieur.

b) La relation entre champ et potentiel s'écrit :  $E = -\frac{dV}{dr}$ , on déduit :

$$-dV = \omega B r dr$$

En intégrant entre l'axe et un point de la périphérie ( $r = a$ ) du disque :

$$e = V_0 - V_a = \frac{\omega B a^2}{2}$$

2°) a) Flux coupé par un rayon du disque :

$$d\phi_C = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Pendant  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , un rayon du disque coupe la surface  $S = \pi a^2$  et pendant un temps  $dt$ , le rayon du disque coupe la surface  $dS = \frac{dt}{T} S$ .

Soit 
$$dS = \frac{\omega a^2}{2} dt$$

d'où 
$$d\phi_C = \frac{B \omega a^2}{2} dt$$

b) La loi de Lenz nous implique au signe près :  $e = \frac{d\phi_C}{dt}$ .

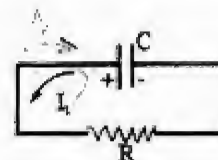
Soit 
$$e = \frac{B \omega a^2}{2}$$

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
CASABLANCA

Année : 1985-86  
2ème session  
Section : MPI

ENONCE

1 - Soit un condensateur de capacité  $C$ , initialement chargé; à  $t = 0$ , sa charge est  $Q_0$ . On réunit ce condensateur à une résistance  $R$ ; comme l'indique la figure ci-contre :



1°) a) Montrer que la charge du condensateur  $Q_t$  à l'instant  $t$  est donnée par l'expression :

$$Q_t = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

b) En déduire l'intensité du courant  $I_1$  qui parcourt la résistance  $R$ .

2°) a) Calculer l'énergie élémentaire  $dW$  dissipée dans  $R$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ .

b) Montrer alors, qu'au bout d'un temps infiniment grand, l'énergie électrostatique  $W_e$  initialement emmagasinée dans C est totalement dissipée dans R. Calculer la force  $\frac{dF}{dt}$  qui s'exerce sur l'unité de longueur des 2 fils. Intérêt de ce calcul ?

II-A-1°) Calculer, au moyen du théorème d'Ampère, le champ magnétique  $\vec{B}_P$  engendré par un fil rectiligne parcouru par un courant constant  $I$  en tout point P situé à la distance  $r$  du fil. Existe-t-il en ce point un champ électrique ?

2°) a) On rappelle l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}_P$  engendré au point P par un conducteur filiforme parcouru

$$\text{par un courant } I : \vec{A}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}}{r}$$

Quel est le sens de  $\vec{A}_P$  engendré par le fil rectiligne ?

b) Dédurre, de l'expression de  $\vec{B}_P$ , le potentiel vecteur  $\vec{A}_P$  au point P.

ne tiendra pas compte du terme constant dans l'expression de  $\vec{A}_P$  donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

( $\vec{a}$  étant un champ de vecteurs quelconque).

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} & \text{suivant } \vec{e}_r \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} & \text{suivant } \vec{e}_\varphi \\ \frac{a_\varphi}{r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{r \partial \varphi} & \text{suivant } \vec{e}_z \end{cases}$$

c) Que peut-on conclure à propos du flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée  $\Sigma$  fictive ou matérielle quelconque ?

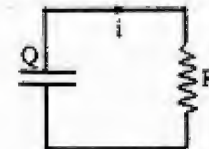
On rappelle :  $\text{div}(\text{rot } \vec{a}) = 0$

3°) Le fil est maintenant parcouru par un courant  $I_1$  à variation sinusoidale :  $I_1 = I_M \cos(\omega t - \varphi)$ . Donner l'expression du champ électrique induit au point P.

B - On considère cette fois 2 fils conducteurs rectilignes parallèles finis distants de  $r$  et parcourus en sens inverse, par 2 courants constants  $I_1$  et  $I_2$ . Calculer la force  $\frac{dF}{dt}$  qui s'exerce sur l'unité de longueur des 2 fils. Intérêt de ce calcul ?



1°) a) A l'instant  $t = 0$ , le condensateur portant la charge  $Q_0$  est relié aux bornes de R.



L'intensité  $i(t)$  du courant de décharge, définie par :  $i = -\frac{dQ}{dt}$

donne :

$$R i = \frac{Q}{C} \quad [1]$$

d'où

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Soit

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

La solution d'une telle équation est :

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad [2]$$

b) A partir de  $i = -\frac{dQ}{dt}$ , nous déduisons :

$$I(t) = \frac{Q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

2°) a) L'énergie élémentaire  $dW$  dissipée par effet Joule dans la résistance R pendant l'intervalle de temps  $dt$  :

$$dW = R i^2 dt$$



b) Reprenons l'expression [1] :

$$R i - \frac{Q}{C} = 0$$

Multiplions les deux membres de cette équation par  $i dt$  :

$$R i^2 dt - \frac{Q}{C} i dt = 0$$

ou encore :

$$R i^2 dt + \frac{Q}{C} dQ = 0$$

En intégrant de  $t = 0$  à  $t$  infini, c'est-à-dire de  $Q = Q_0$  à  $Q = 0$  (relation [2]), il vient :

$$\int_0^\infty R i^2 dt - \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = 0$$

Or  $\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$  est l'énergie électrostatique initialement emmagasinée par le condensateur :

celle dissipée dans la résistance par effet Joule dans  $R$  est égale à  $\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ .

II - 1°) Le courant  $I$  est porté par l'axe  $Z'Z$  du fil. Ce courant crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dont les lignes d'induction sont des cercles d'axe  $Z'Z$ .

Donc, en tout point  $M$  de l'espace ( $OP = r$ ), le champ magnétique a :

- une direction tangente à la ligne de force circulaire ( $\Gamma$ ) d'axe

$Z'Z$ , passant par  $M$  : donc  $\vec{B}$  est perpendiculaire au plan  $(\vec{k}, \vec{r})$ ;

- un sens tel que le trièdre  $\vec{i}, \vec{r}, \vec{B}$  soit direct;

- une intensité  $B$  qui ne dépend que de  $r$ , par raison de symétrie.

Pour déterminer cette intensité, appliquons le théorème d'Ampère : la circulation de  $\vec{B}$  le long de ( $\Gamma$ ) est :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$



$\sum I$  étant l'intensité totale des courants enlacés par ( $\Gamma$ ). Donc :

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

donc :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2°) a) L'expression du potentiel vecteur permet de nous prouver que  $\vec{A}_P$  et  $I$  ont même direction; donc :  $\vec{A}_P = A \vec{k}$

Remarque : Le potentiel vecteur ne peut pas être calculé par la formule  $\vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}}{r}$

En effet,  $\vec{A}_P$  est défini à un gradient près; pour déterminer complètement  $\vec{A}$ , on impose la condition  $\text{div } \vec{A} = 0$ , valable s'il n'y a pas de courant à l'infini. Mais cette condition ne peut plus être utilisée dans notre cas, car le fil étant illimité, il y a des courants à l'infini.

b) Utilisons les coordonnées cylindriques  $(r, \varphi, z)$  pour repérer  $P$ ; comme le champ magnétique  $\vec{B}$  dérive du potentiel vecteur  $\vec{A}$ , on a :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{avec la condition :} \quad \text{div } \vec{A} = 0.$$

$$\text{Et puisque } \begin{cases} B_r = B_z = 0 \\ B = B_\varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_r = A_\varphi = 0 \\ A = A_z \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0 \\ B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial A}{\partial r} \\ B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

On en déduit  $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$ , ce qui prouve que  $\vec{A}$  est indépendant de l'orientation  $\varphi$ .

De plus, la condition  $\text{div } \vec{A} = 0$  entraîne  $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ , c'est-à-dire  $\vec{A}$  est indépendant de la cote  $z$ .

2. Donc le potentiel vecteur ne dépend que de  $r = OP$  et son module est :

$$A = \int -B_\phi dr \quad \text{car } B_\phi = -\frac{\partial A}{\partial r}$$

or :

$$B = B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$

d'où

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2 \pi} \int \frac{dr}{r}$$

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2 \pi} \text{Log } r + \text{cte}$$

On ne tiendra pas compte du terme constant dans l'expression de A. Donc :

$$\vec{A}_p = \left( -\frac{\mu_0 I}{2 \pi} \text{Log } r \right) \vec{k}$$

c)

$$\phi = \int \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_V \text{div } \vec{B} d\tau = \int \int \int_V \text{div } (\text{rot } \vec{A}) d\tau = 0$$

Ce résultat est, comme on le voit, très général; il montre que le flux est conservatif.

3°) Nous avons trouvé dans la question 2°) b) l'expression du potentiel vecteur qui devient ici :

$$\vec{A}_p = \left( -\frac{\mu_0 I}{2 \pi} \text{Log } r \right) \vec{k}$$

Le champ électrique  $\vec{E}_{i,p}$  induit au point P est défini par :  $\vec{E}_{i,p} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Soit :

$$\vec{E}_{i,p} = -\left( \frac{\mu_0 I_M \omega \sin(\omega t - \phi)}{2 \pi} \text{Log } r \right) \vec{k}$$

B - La loi de Laplace s'écrit :  $d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2$

expression de la force agissant sur un élément de courant  $I_1 d\vec{l}_1$  du fil (1).

De même :  $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$

Or :  $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2 \pi r}$

$$dF_1 = I_1 dl_1 B_2$$

Soit

$$\frac{dF_1}{dl_1} = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi r}$$

De même :

$$\frac{dF_2}{dl_2} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi r}$$

Les forces sont égales et opposées.

Intérêt de ce calcul : Si  $I_1 = I_2$  et  $r = 1 \text{ m}$ ,

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{2 \pi} = \frac{4 \pi 10^{-7}}{2 \pi} I^2 = 2.10^{-7} I^2$$

Cette relation permet alors la définition électromagnétique de l'Ampère.

UNIVERSITE HASSAN II  
FACULTE DES SCIENCES  
EL JADIDA

Année : 1986-87  
2ème session  
Section : PCI

ENONCE

A - Une distribution volumique de charges (densité  $\rho$ ) admet le point O comme centre de symétrie et crée le potentiel V défini par :

$r$  : distance au point O  
 $a$  : constante positive

$$V(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$



$q$  : charge positive

1°) Calculer :

- a) La valeur du champ en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de  $O$ .  
b) Le flux à travers la sphère  $(O, r)$ .

2°) Que deviennent les expressions précédentes lorsque  $r \rightarrow 0$ , interpréter les résultats obtenus.

3°) a) Quelle est l'expression de  $\rho$  à la distance  $r$  de  $O$ ? On appliquera le théorème de Gauss au volume compris entre les sphères  $(O, r)$  et  $(O, r+dr)$ .

b) En déduire la charge contenue dans la sphère  $(O, r)$ , préciser ce que devient cette charge lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

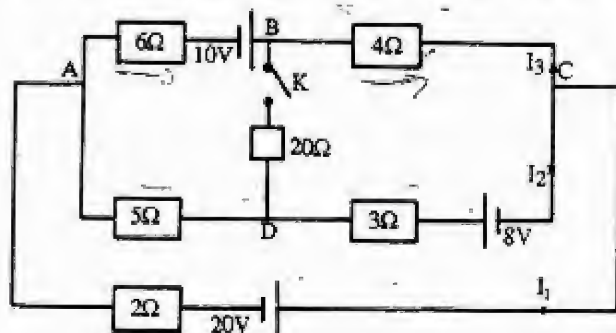
4°) Construire le graphe de la densité radiale de charge  $4\pi r^2 \rho$ .

B - On considère le circuit de la figure ci-dessous :

1°) L'interrupteur  $K$  étant ouvert, calculer les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

2°) Déterminer la f.e.m.  $U_0$  et la résistance  $R_1$  du générateur de Thévenin équivalent au pont entre les nœuds  $B$  et  $D$ .

3°) En déduire le courant  $I$ , dans la branche  $BD$  lorsque  $K$  est fermé.



SOLUTION

A 1°) a) Par raison de symétrie du problème, la relation liant le champ électrique au potentiel se réduit à :  $E = -\frac{dV}{dr}$

On en déduit

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad [1]$$

b) Calculons le flux de  $\vec{E}$  traversant la sphère de rayon  $r$  :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int E(r) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$2^\circ) \lim_{r \rightarrow 0} E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad [2]$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad [3]$$

[2] : C'est l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle placée en  $O$  en un point  $M$  ( $OM = r$ ).

[3] : Le flux de champ à travers une surface sphérique de rayon  $r$ .

3°) a) D'après le théorème de Gauss on a :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$$

d'après la relation [1], l'expression de  $Q(r)$  est :

$$Q(r) = q \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad [4]$$

$Q(r)$  est lié à la densité de charge  $\rho(r)$  par la relation :

$$Q(r) = \int \rho(r) dV = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr \quad [5]$$

Des relations [4] et [5], on déduit :

$$\frac{q}{4\pi} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) = \int \rho(r) r^2 dr$$

soit en dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à  $r$  :

$$\frac{q}{4\pi} \left(-\frac{1}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) = r^2 \rho(r)$$

Donc

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Remarque : 2ème méthode :

La fonction  $V(r)$  satisfait l'équation de Poisson, qui par raison de symétrie se réduit à :

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \quad [6]$$

D'après l'expression de  $V(r)$  on a :

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \frac{dV}{dr} &= -q \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\ 4\pi\epsilon_0 \frac{d^2V}{dr^2} &= q \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{a^2r} + \frac{1}{a^2r}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \end{aligned}$$

Remplaçons  $\frac{dV}{dr}$  et  $\frac{d^2V}{dr^2}$  par leur expression dans [6], il vient alors :

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

b) ▼ A l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ , la charge électrique totale est :

$$Q(r) = \int_0^r \rho(z) 4\pi z^2 dz$$

$$Q(r) = -q \int_0^r \frac{z}{a} \exp\left(-\frac{z}{a}\right) d\left(\frac{z}{a}\right)$$

avec la variable  $x = \frac{z}{a}$ , il vient :

$$Q(r) = -q \int_0^{\frac{r}{a}} x e^{-x} dx$$

Or

$$\int x e^{-x} dx = -(1+x) e^{-x}$$

D'où l'on déduit :

$$Q(r) = q \left[ (1+x) e^{-x} \right]_0^{\frac{r}{a}}$$

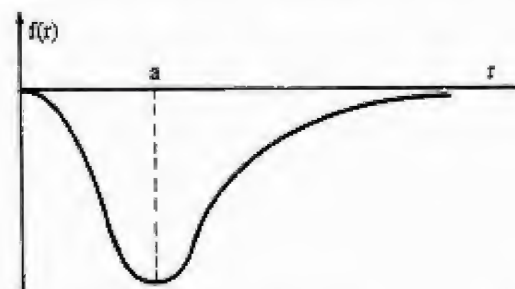
$$Q(r) = -q + q \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = -q + q = 0$$

$$4^\circ) f(r) = 4\pi r^2 \rho(r) = -\frac{qr}{a^2} e^{-r/a}$$

$$\text{La dérivée de } f(r) \text{ est : } \frac{df}{dr} = \frac{-q}{a^2} \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

Elle s'annule pour la valeur de  $r = a$ . L'allure de la courbe représentant la fonction  $f(r)$  est représentée ci-dessous.



Si 1°) la loi aux nœuds donne :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

(figure du texte)

Appliquons les lois d'Ohm entre A et C :

$$V_C - V_A = 10 I_3 + 10 \quad [1]$$

$$= 8 I_2 - 8 \quad [2]$$

$$= -2 I_1 + 20 \quad [3]$$

Remplaçons  $I_1$  par  $I_2 + I_3$  :

$$-2 I_2 - 2 I_3 + 20 = 10 I_3 + 10$$



Donc

$$I_3 = \frac{-2 I_2 + 10}{12}$$

$$10 \left( \frac{-2 I_2 + 10}{12} \right) + 10 = 8 I_2 - 8$$

Soit

$$I_2 = \frac{79}{29} \text{ A}$$

D'où

$$I_3 = \frac{1}{12} \left( -2 \frac{79}{29} + 10 \right)$$

$$I_3 = \frac{11}{29} \text{ A}$$

Donc :

$$I_1 = \frac{90}{29} \text{ A}$$

2°) ▼ Calcul de  $U_o$  :

Effectuons une coupure artificielle PQ entre B et D; ce qui entraîne un courant nul dans la branche BD et les intensités dans le circuit sont celles calculées dans 1°)

$$I_1 = \frac{90}{29} \text{ A}; \quad I_2 = \frac{79}{29} \text{ A}; \quad I_3 = \frac{11}{29} \text{ A}$$

Donc la tension entre B et D est :

$$U_o = V_D - V_B = -3 I_2 + 8 + 4 I_3$$

Soit

$$U_o = \frac{39}{29} \text{ V}$$

▼ Calcul de  $R_i$

Supprimons toutes les f.e.m des générateurs du circuit.

La résistance équivalente du circuit entre P et Q est alors obtenue en donnant le schéma équivalent au circuit suivant :

Pour cela, remplaçons le triangle BAC par une étoile (figure (b) et (c)) dont les résistances respectives  $r_1, r_2, r_3$  sont données par :

$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{24}{12} = 2 \Omega$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Omega$$

$$r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12}{12} = 1 \Omega$$

La résistance équivalente est alors :

$$R_i = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{r_2 + R_4} + \frac{1}{r_3 + R_5}}$$

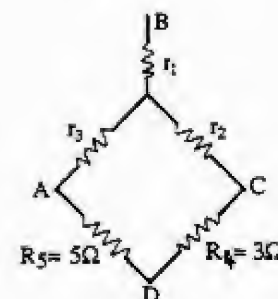
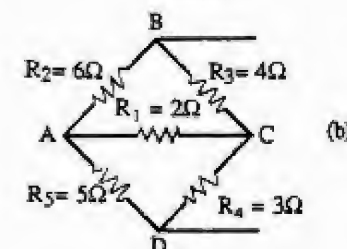
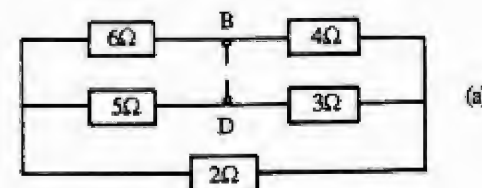
$$\text{Soit } R_i = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3} + 3} + \frac{1}{1 + 5}}$$

$$R_i = \frac{124}{29} \Omega$$

3°) L'intensité  $I$  du courant qui circule dans BD est donc :

$$I = \frac{U_o}{R_i + 20} = \frac{\frac{39}{29}}{\frac{124}{29} + 20}$$

$$I = 55 \text{ mA}$$



UNIVERSITE MOHAMED V  
FACULTE DES SCIENCES  
RABAT

Année : 1986-1987  
2<sup>ème</sup> session  
Section : M

ENONCÉ

1°) Un cylindre conducteur rectiligne, de longueur infinie, de rayon  $a$  porté au potentiel  $V_1$ , porte la charge  $+\lambda$  par unité de longueur. En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ et le potentiel électrostatiques créés à la distance  $r$  de l'axe.

2°) Le cylindre précédent est maintenant parcouru par un courant d'intensité  $I$ , de densité  $\vec{j}$  uniforme, parallèle à l'axe du cylindre. Déterminer l'induction magnétique créée à la distance  $r$  de l'axe.

3°) Un deuxième cylindre identique et parallèle au premier dont l'axe est situé à la distance  $d$  de l'axe  $\Delta_1$  est parcouru par un courant  $(-I)$  de densité uniforme  $(-\vec{j})$ . Calculer l'induction magnétique  $\vec{B}(r)$  entre deux cylindres, en tout point du plan passant par leurs axes ( $a < r < d$ ). En déduire le flux d'induction passant, par unité de longueur, entre les cylindres et le coefficient de self induction  $L$  par unité de longueur de la ligne constituée par les 2 fils.

N.B : La 1<sup>ère</sup> question est indépendante du reste du problème.

SOLUTION

1°) ▼ Par raison de symétrie le champ est radial, son module ne dépend que de la distance à l'axe du cylindre. Prenons pour surface de Gauss une surface cylindrique de rayon  $r$ , d'axe  $z'z$ , de hauteur  $h$  fermée par deux bases circulaires normales à l'axe.

Le flux de champ  $\vec{E}$  par cette surface se réduit au flux sortant par la surface latérale, en effet le flux sortant par les deux bases est nul puisque le champ est tangent à chaque base.

Comme  $\vec{E}$  a le même module en tout point et est partout normal à la surface latérale, il est égal au produit de l'aire par  $E$  :

$$\phi = 2 \pi r h E$$

La charge dans la surface de Gauss vaut :

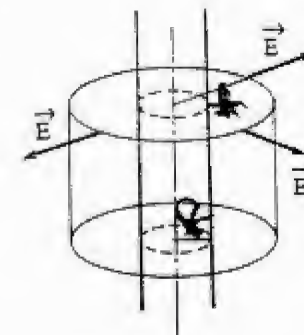
$$Q = \lambda h$$

Le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\phi = 2 \pi r h E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0 r}$$

Soit :



▼ Calcul de potentiel : la relation entre champ et potentiel s'écrit dans ce cas :

$$E = - \frac{dV}{dr} \Rightarrow V = - \int E dr + Cte$$

$$V = - \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \text{Log } r + Cte$$

Le cylindre est porté au potentiel  $V_1$ , donc :

$$V_1 = - \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \text{Log } a + Cte \Rightarrow Cte = V_1 + \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \text{Log } a$$

D'où

$$V = \frac{\lambda}{2 \pi \epsilon_0} \text{Log } \frac{a}{r} + V_1$$

2°) Par raison de symétrie, les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe du cylindre : le module du champ n'est fonction que de  $r$ .

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2 \pi r$$

▼ D'après le théorème d'Ampère :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r}$$



▼  $r < a$  Associons à C une surface S plane d'aire  $\pi r^2$ , l'intensité à travers S a pour valeur :  $j \pi r^2$

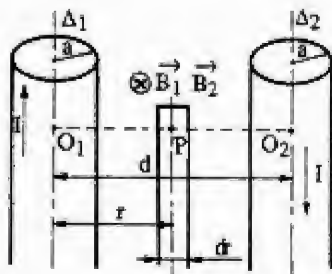
Or  $j = \frac{I}{\pi a^2}$  donc :  $j \pi r^2 = I \frac{r^2}{a^2}$

D'après le théorème d'Ampère:  $B 2 \pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2}$

Soit :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \frac{r}{a^2}$$

3°)



Les courants  $+I$  et  $-I$  qui circulent dans chaque cylindre créent en chaque point P ( $OP = r$ ) des champs magnétiques  $B_1$  et  $B_2$  de même direction et de même sens qui s'ajoutent donc en module.

$$B = B_1 + B_2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2 \pi} \left( \frac{I}{r} + \frac{(+I)}{d-r} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 \pi} \frac{d}{r(d-r)}$$

▼ Le flux élémentaire à travers une surface rectangulaire d'épaisseur  $dr$ , de hauteur  $h$  :

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{ds} = B \cdot h dr$$

Le flux total est donc :

$$\phi = \int_a^{d-a} B h dr = \frac{\mu_0 I h}{2 \pi} \int_a^{d-a} \frac{d}{r(d-r)} dr$$

Or  $\frac{d}{r(d-r)} = \frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}$

Il vient alors :  $\phi = \frac{\mu_0 I h}{2 \pi} \left[ \text{Log} \frac{r}{d-r} \right]_a^{d-a}$

$$\phi = \frac{\mu_0 I h}{\pi} \text{Log} \frac{d-a}{a}$$

▼ Le coefficient de self induction  $L$ , par unité de longueur de la ligne est  $L/h$

Or  $\phi = L I$  donc  $\frac{L}{h} = \frac{\phi}{I h}$

Soit :

$$\frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{\pi} \text{Log} \frac{d-a}{a}$$



et encore plus..